INSTITUZIONI GEOMETRICHE

DEL REVERENDISS. PADRE ABATE

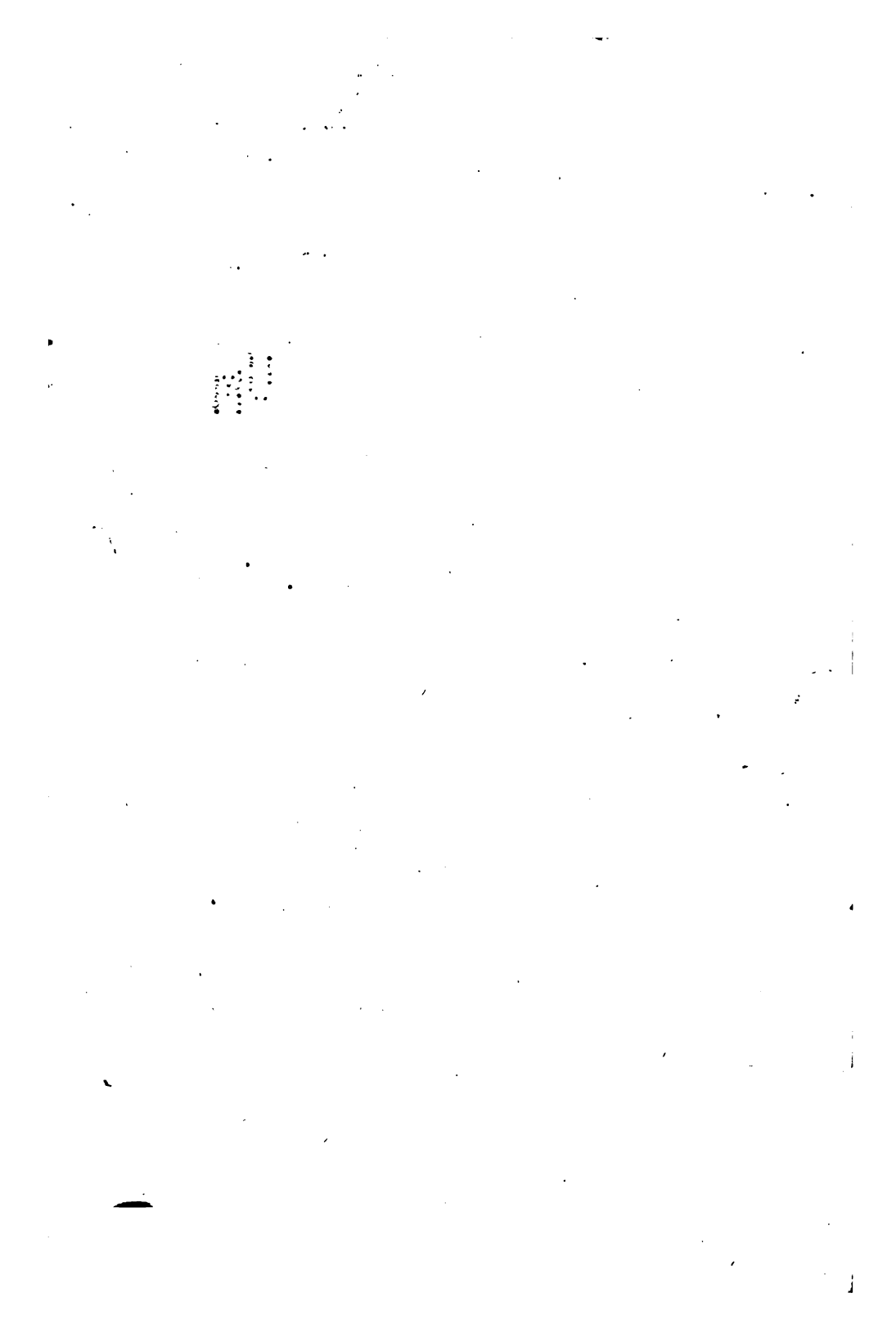
D. GUIDO GRANDI

CAMALDOLESE

PROFESSORE DI MATEMATICA NELL' UNIVERSITA' DI PISA.

IN FIRENZE NELLA STAMPERIA DI S. A. R.

Per Gio: Gaetano Tartini, e Santi Franchi.

CON LICENZA DE' SUPERIORI MDCCXXXXI.

PREFAZIONE

Olti furono gli antichi Autori, che in diverſe maniere propoſero già gli Elementi di Geometria, cioè Ipocrate Chio, Leonzio, Eudoſſo Gnidio, Teudio Magnete, e più abbondantemente de' mentovati Ermotimo Colofonio, vinto però anch' eſſo, e di gran lunga ſuperato da Euclide, il quale con miglior metodo, con maggior chiarezza, e con più eſatte dimoſtrazioni degli altri gli diſteſe; laonde furono abbandonate, e ſi perderono le Inſtituzioni matematiche de' ſopraddetti Scrittori, e ciaſcuno s' appigliò a quelle di Euclide, le quali ſono ſtate

§ 2 ſem-

ſempre meritamente applaudite da tutti i Matematici antichi, e moderni.

Sono paſſati circa a venti ſecoli, da che furono pubblicati gli Elementi di Euclide, ed in queſto tempo da diverſi illuſtri, e celebri Geometri molte altre famoſe ſpeculazioni ſono ſtate ritrovate, che hanno ſomminiſtrato agl' intendenti non piccolo campo di far nuove Inſtituzioni Elementari più compendioſe, corredate di Teoremi ancora più generali di quelli di Euclide, ed arricchite di Propoſizioni da eſſo non dimoſtrate.

E quantunque interrogato una volta l'iſteſſo Euclide dal Re Tolomeo, ſe poteſſe trovarſi una via più compendioſa di quella, che era propoſta ne' libri de' ſuoi Elementi, riſpondeſſe, che non poteva aſſegnarſi nè più nobile, nè più regia di quella da lui inventata; non oſtante ſono di parere, che ciò poteſſe per avventura verificarſi in quel tempo, ma non già dopo il decorſo di due mila anni, nel qual tempo ſendo ſtate fatte grandiſſime ſcoperte in queſta ſublimiſſima Scienza, non vi ha dubbio, che non poſſa eſſere ſtato immaginato, e diſteſo un metodo più facile, più breve, e forſe ancora più comodo di quello tenuto da Euclide. Abbaſtan-

ſtanza vien ciò comprovato dalle molte Inſtituzioni Geometriche divulgate di tempo in tempo, e propoſte da varj dottiſſimi Matematici, tra' quali ſi poſſono annoverare il Borelli, il Fabri, l' Arnaldo, il Duca di Burgundia, il Pardies, lo Sturmio, il Guarini, il Marchetti, il Crouſaz, il Wolfio, ed altri, le quali ſono ſtate ricevute ſempre con ſomma lode, ed applauſo da tutta la Repubblica Letteraria. Laonde io pure moſſo dal loro eſempio, ho determinato di far pubbliche queſte mie nuove Inſtituzioni, luſingandomi, che debbano anch' eſſe incontrare l' approvazione, e l' aggradimento degl' intendenti.

Per non prolungarle di ſoverchio, non ho poſto in eſſe tutte le nuove proprietà geometriche, che da me ſono ſtate ritrovate, ma quelle ſolo, che ho creduto più neceſſarie agli ſtudenti ſcolari, non potendo nè pur io in queſta troppo grave età, e con la mente alquanto affaticata attender di propoſito a raccoglierle tutte inſieme da' miei ſcritti, e diſporle con ordine bene adattato a queſti Elementi.

Sembrerà forſe a taluno coſa nuova l' aver io poſti gli Aſſiomi avanti alle Definizioni, alterando

do in cotal guisa il metodo d' Euclide; ma siccome nelli Scolj da me addotti alle Definizioni, mi servo di questi Assiomi, perciò ho stimato bene di servirmi di questa disposizione, che voglio sperare non debba essermi disapprovata.

Ho diviso queste Institituzioni in tre parti; la prima riguarda la materia trattata da Euclide ne' primi quattro libri; la seconda concerne ciò, che dal medesimo vien dimostrato nel quinto, e nel sesto; e la terza comprende la dottrina da esso spiegata nell' undecimo, duodecimo, e decimoterzo libro.

Ciascuna di queste tre parti comprende poche Proposizioni, avendole estese con molti Corollarj ad altre asserzioni conseguentemente dimostrate. Se con tal metodo io abbia pienamente conseguito il fine da me bramato, il vedranno i cortesi Leggitori, al prudente intendimento de' quali, ed al retto giudizio de' dottissimi Matematici io totalmente mi rimetto.

INSTITUZIONI GEOMETRICHE

PARTE PRIMA.

ASSIOMI.

I. LE cose uguali a una terza sono uguali ancora fra loro.

II. Di due cose uguali se una è maggiore, o minore di qualche terza quantità, l' altra ancora sarà maggiore, o minore di essa terza; e se una terza quantità è maggiore, o minore della prima di due altre uguali, sarà parimente maggiore, o minore della seconda.

III. Ad uguali quantità aggiungendo una stessa quantità comune, o altrettante quantità, tra di loro uguali, si faranno pure esse somme uguali; e dalle uguali detraendo qualche comune porzione, o altrettante parti uguali, le residue rimangono pure tra loro uguali,

IV. Alle quantità disuguali aggiunta una comune, o altrettante uguali, si fanno pure somme disuguali; ed ancora levando dalle disuguali una stessa comune porzione, o altrettante parti tra loro uguali, le residue rimarranno pure disuguali.

V. Le quantità, che soprapposte l' una all' altra, si combaciano esattamente, senza veruno eccesso, o difetto dell' una dall' altra, sono uguali;

purchè non ſolamente il ſenſo (che potrebbe non avvertirne il preciſo adattamento) ma la ragione moſtri dover ciò ſuccedere.

VI. Il tutto è ſempre maggiore di qualunque ſua parte; ed è il tutto uguale a tutte le ſue parti preſe inſieme.

VII. Se il doppio d'una quantità è maggiore, o minore, o uguale al doppio d'un altra quantità, ancora quella prima ſemplice quantità ſarà maggiore, minore, o uguale all' altra ſemplice; e lo ſteſſo può dirſi de' tripli, o altri ugualmente moltiplici di altre ſemplici quantità, che ſecondo quelli ſaranno tra di loro uguali, o l'uno maggiore, o minore dell' altro, ancora queſte ſemplici ſaranno uguali, o la prima maggiore, o reſpettivamente minore della ſeconda.

VIII. Similmente le quantità doppie, o triple, o ugualmente moltiplici d'una medeſima, o di altre tra di loro uguali, debbono eſſere quelle pure uguali tra loro.

DEFINIZIONI.

TAV. I. FIG. 1.

I. *Corpo* diceſi quella quantità, che ha tre dimenſioni, in lunghezza, in larghezza, e in profondità.

II. *Superficie* è l'eſtremità del Corpo diſteſa ſolamente in lunghezza, ed in larghezza, non in profondità.

III. *Linea* è l'eſtremità della ſuperficie, che ſolo in lungo diſtendeſi, ſenza veruna larghezza, o groſſezza.

IV. *Punto* è l'eſtremo della linea, ſenza veruna eſtenſione.

SCO-

SCOLIO I.

I. PEr esempio, nel dado AE stendesi la di lui mole nella lunghezza FE, nella larghezza FG, e nella profondità, o altezza FC; e questo dicesi Corpo, o ancora Solido, che ancora può avere disuguale estensione in ciascheduna parte, come un tronco ADEFG, in cui è maggiore la lunghezza FE della lunghezza CD, la larghezza FG è maggiore di CA, la profondità in CF può essere maggiore della profondità in BH &c. non essendo necessario, che il corpo abbia per qualunque verso, in ciascheduna parte, una uguale estensione. FIG. 1. FIG. 2.

II. Perchè poi da noi non si trova alcun corpo d' infinita grandezza, ma si vede ognuno terminato, conviene discernere quelle estremità, che lo limitano, oltre le quali più non si estende; e queste sono le Superficie di esso Corpo, quali per esempio sono le facce laterali AF, FD, DH, HA, e la suprema BC, e l' infima FH, le quali hanno bensì estensione in lunghezza, e in larghezza, ma non in profondità, non avendo grossezza alcuna; altrimenti non sarebbero puri termini del corpo, ma parti del medesimo.

III. Inoltre, perchè le stesse superficie non sono infinitamente estese, ma limitate, debbono avere le loro estremità, che sono le Linee; come la superficie AD vedesi limitata dalla parte destra, e dalla sinistra, con le linee BD, AC, siccome delle parti d' avanti, e di dietro con le linee CD, AB, nelle quali ritrovasi la sola estensione in lunghezza, ma non veruna larghezza, altrimenti sarebbero FIG. 3.

ancor esse parti di superficie, e non puri confini di essa.

IV. *Finalmente, non essendo qualunque linea prolungata in infinito, dovrà essere terminata, e non immensa, le di cui estremità saranno li* Punti, *d' onde principiano, e dove finiscono: come nella linea* AB *li due termini sono i punti* A, B; *e nella linea* CD *sono gli estremi punti* C, D, *ne' quali non deve trovarsi specie veruna di estensione, perchè se avessero qualunque piccola lunghezza, sarebbero lineette, e non termini di esse linee.*

FIG. 4.

V. *Si potrebbe però da taluno considerare, che in una superficie globosa, benchè non sia infinita, non possono accennarsi le linee, che sono i suoi termini; ed ancora in una linea rotonda, che ritorni in se stessa, quantunque finita, non potervi assegnare i punti, da cui sia terminata. Al che basterà rispondere, che in qualunque sito segandosi il corpo di una palla, verrà segata ancora la superficie globosa di essa con una linea curva, la quale sarà il termine di quelle parti di superficie, che vengono divise da essa; e parimente segando una superficie circondata da quella linea rotonda, si determineranno li punti, che sono termini delle parti di quella curva, che ritornava in se stessa, e che resta divisa per questo taglio della superficie in due porzioni terminate da essi punti.*

DEFINIZIONI.

V. Di tutte le linee, come *ACB*, *AEB* terminate negli stessi punti *A*, *B*, la più breve di tutte, che è *AB*, dicesi *Linea Retta*; le altre poi

FIG. 5.

poi sono *Curve*, o composte di più curve, di più rette, o di qualche retta, oppure di qualche curva connessa a quella.

VI. Di tutte le superficie, che possono terminare nelle medesime linee *AC*, *BD*, la minima di tutte *ACDB* dicesi *Superficie Piana*; l'altre, come *CFBDA*, ovvero *AEBDHC*, sono *Curve*, o composte di più curve, o di più piane, ovvero di curve congiunte con piane. FIG. 6.

VII. Dicesi *Figura* qualunque spazio, che da uno, o da più termini, per ogni verso, riesca circoscritto.

VIII. Quella figura, che da tre linee rette sia compresa, dicesi *Triangolo Rettilineo*.

SCOLIO II.

I. *Due sole rette linee non possono fare una figura, perchè o sono del tutto staccate, come* AB, CD, *tra le quali riesce lo spazio di quà, e di là aperto; o convengono in un solo punto* F *le rette* EF, GF, *tra le quali pure riesce lo spazio aperto dalla banda opposta al loro concorso; o pure se in due punti* H, I *concorrono due linee rette* IH, HI, *riusciranno adattate in una stessa lunghezza, senza comprendere spazio veruno, essendo l' una soprapposta all' altra, ed esattamente congruente con quella; che se si credesse andassero disgiunte, come* HI, HLI, *comprendenti qualche spazio, una di esse dovrà essere maggiore dell' altra, e però sarà curva; come sarà* HLI, *non potendo essere tanto questa, che quella linea la brevissima estensione di lunghezza fra i detti termini.* FIG. 7.

II. *Bensì due linee curve* ACB, AFB, *ovvero* FIG. 8.

ro una retta AB *con la curva* ACB, *o ancora una sola curva* ADBC, *che ritorni in se stessa, possono fare una figura, comprendendosi tra esse lo spazio per ogni verso.*

FIG. 9. III. *Perchè adunque non possono due linee rette comprendere una figura, almeno tre rette linee* AB, AC, CB *conviene, che si connettano co' loro termini per fare una figura* ABC, *che dicesi* Triangolo rettilineo.

FIG. 10. IV. *Quanto poi alle superficie piane non possono comprendere qualche figura corporea, nè due, nè tre sole, ma quattro almeno, come accade in una Piramide* EGFD; *compresa da quattro triangoli* DEG, DGF, EGF, EDF; *imperocchè tre*

FIG. 11. *soli piani* A, B, C, (*e molto meno due soli* A, B) *non possono comprendere una figura corporea; ma dalle superficie curve si può benissimo, o sia una sola, o due, o tre ancora, comprendere lo spazio, onde risulterebbero le figure de' Corpi.*

FIG. 12. V. *Dall' essere una linea retta la più breve di tutte l' altre terminate a' medesimi punti, come si è detto nella Definizione* V. *è chiaro, che in qualsivoglia triangolo* BAC *qualunque lato* BC *deve essere minore della somma degli altri due* AB, AC *terminati agli stessi punti* B, *e* C, *tra cui giace la linea* BC; *siccome ancora, se più altre linee* ACB, ADB *convengono ne' due termini* A, B, *esse sono maggiori della retta* AB; *ed essendo amendue concave verso la medesima parte, bisogna che l' esteriore* ACB *sia maggiore dell' interiore* ADB, *accostandosi più questa, che quella alla minima retta linea* AB.

FIG. 13. VI. *Onde ancora è chiaro, che se da' termini*

A, B

A, B della base AB *d'un triangolo* ACB, *siano tirate dentro due linee* AD, BD, *convenienti in* D, *saranno le due interne* AD, BD *minori delle due esteriori* AC, BC, *paragonando la somma di quelle alla somma di queste, come si è detto delle curve antecedenti* ADB, ACB.

DEFINIZIONI.

IX. Concorrendo due linee *AB*, *CB* nel punto *B*, non da parti direttamente opposte, che farebbero così una sola retta linea, ma in modo tale, che resti una inclinata all' altra, si diranno fare un *Angolo* nel punto del loro concorso, il quale stimerassi maggiore, o minore, secondo la maggiore, o minore apertura di dette linee, senza riguardo alla lunghezza di esse. FIG. 14.

X. Quando una linea *DB* concorra con la retta *AC* nel punto *B*, in modo tale, che non penda più da una banda, che dall' altra, ma sia ugualmente inclinata ad amendue le parti *BC*, *BA*, sicchè gli angoli *ABD*, *CBD* siano uguali, allora detta linea *BD* si dirà *Perpendicolare* all' altra *AC*. FIG. 15.

XI. E ciascuno di detti angoli *ABD*, *CBD* si dirà *Angolo retto*.

XII. Ma facendo la linea *DB* sopra la *AC* angoli disuguali, da una parte l'angolo *ABD* maggiore, dall' altra *CBD* minore, si dirà essa linea *DB Obliqua* sopra l' altra *AC*. FIG. 16.

XIII. E l' angolo maggiore si dirà *Ottuso*, l' angolo minore *Acuto*.

SCOLIO III.

I. D*Icesi uno degli angoli* ABD *conseguente all' altro* CBD *, essendo fatti ambidue dalla medesima linea* DB *sopra la stessa* AC ; *e dicendosi* Retti *tali angoli, quando sono tra di loro uguali, bisogna che riuscendo disuguali, il maggiore del retto sia l' ottuso, ed il minore del retto sia l' acuto, e tutti e' due presi insieme sono uguali alla somma di due retti.*

II. *Non solamente sono uguali tra loro li due conseguenti angoli retti, fatti da una perpendicolare sopra una linea retta, ma ancora qualunque angolo retto è uguale ad un altro fatto sopra un altra linea; imperocchè, se alla retta* AC *, cui è perpendicolare* DB *, si soprapponga la* EH *, cui è perpendicolare la* LF *, facendo concorrere il punto* F *col punto* B *, si adatterà essa retta* ABC *con* EFH *, e la perpendicolare* BD *con l' altra* FL ; *perchè altrimenti, se la* FL *cadesse di quà dalla* BD *, l' angolo* EFL *sarebbe minore di* ABD *, ed* LFH *maggiore di* DBC ; *onde essendo uguali* ABD *, e* DBC *, non sarebbero uguali* EFL *,* LFH *, per essere quello minore del primo, e questo maggiore del secondo, che era uguale al primo. Bisogna dunque, che le perpendicolari* FL *,* BD *convengano, e però l' angolo retto* ABD *sia uguale all' altro* EFL *, e l' angolo retto* DBC *sia uguale ad* LFH *, e così a ciascun retto.*

FIG. 17.

III. *E' poi chiaro, che li due angoli ancora disuguali fatti da una retta* DB *sopra alla retta* AC *, cioè l' angolo* ABD *ottuso, e* DBC *acuto, presi insieme sono uguali a due retti, perchè se dal me-*

TAV. II. FIG. 18.

de-

desimo punto B *sarà tirata sopra la medesima retta* AC *la perpendicolare* BE, *le due aperture degli angoli* ABD, *e* DBC *si adatteranno alli due retti* ABE, EBC, *e però gli saranno uguali, combaciandosi con essi (per l' assioma quinto)*

IV. *Segandosi due linee rette nel punto* B, *gli angoli alla cima opposti* ABF, CBD *saranno uguali, perchè aggiunto all' uno, e all' altro l' intermedio* ABD, *è chiaro, che li due* ABF, *ed* ABD *sono uguali a due retti, come ancora li due* CBD, ABD (*per quello si è detto al numero* 3. *precedente*); *dunque essendo* ABF *con* ABD *uguali a* CBD *con* ABD, *tolto di comune* ABD, *deve essere* ABF *uguale a* CBD (*per l' assioma* 3.) FIG. 19.

V. *Se più linee* AC, DF, HI *s' intersegano nel medesimo punto* B, *tutti gli angoli, che ne risultano, saranno uguali a quattro retti; ed ancora se non fossero per diritto esse linee l' una con l' altra, ma convenissero in esso punto* B *a fare tutti gli angoli, che riempissero quello spazio, la somma di detti angoli sarebbe uguale a quattro retti; perchè tirata qualunque retta linea* HI *per lo punto* B, *gli angoli, che rimarrebbero da una parte di essa, sarebbero uguali a due retti, e quelli dell' altra parte ad altri due retti, e però tutti a quattro retti debbono essere uguali.* FIG. 20.

VI. *Quindi solamente quelle figure, di cui tutti gli angoli posti insieme uguaglino quattro retti, possono riempire lo spazio, congiungendosi in un punto, senza lasciarvi interstizj voti.*

VII. *Se due linee rette* AB, CB *congiungendosi dall' una, e dall' altra parte colla retta* DB *nello stesso punto* B, *faranno con essa li due angoli* FIG. 21.

goli ABD, CBD *uguali a due retti, saranno esse linee per diritto fra loro; altrimenti prolungata la retta* CB, *se non convenisse colla* BA, *ma cadesse nel sito* BE, *sarebbero gli angoli* EBD, *e* CBD *uguali a due retti, cioè agli stessi due* ABD, *e* CBD; *dunque sarebbe* ABD *uguale ad* EBD, *cioè la parte al tutto; il che è impossibile (per l' Assioma 6.)*

DEFINIZIONI.

XIV. Intendendo muoversi la retta *CA* in una superficie piana attorno all' estremo suo punto *C*, che ivi mantengasi fisso, e raggirarsi essa linea fino a che ritorni al primiero suo sito, la superficie *ADBE*, che quindi viene generata, si chiama *Cerchio*, ovvero *Circolo*.

FIG. 22.

XV. Ed esso punto fisso *C* dicesi *Centro* di esso Cerchio.

XVI. E la curva descritta dall' estremo *A* nel suo giro, si dice *Periferia*, o *Circonferenza*.

XVII. Qualunque retta *AB*, ovvero *DE* stesa pel centro *C*, e terminata di quà, e di là alla circonferenza si chiama *Diametro* del Cerchio.

XVIII. E qualsivoglia retta tirata dal centro alla circonferenza *CA*, *CD*, *CB*, *CE*, dicesi *Raggio*, ovvero *Semidiametro* di quel circolo.

SCOLIO IV.

I. *E' Manifesto per le cose dette di sopra, che siccome il Triangolo è la prima, e più semplice figura rettilinea tra le piane figure, così il Circolo è la prima, e più semplice Figura curvilinea.*

II. *Si*

II. *Si osservi ancora, che nel Cerchio tutti i raggi, cioè tutte le linee condotte dal centro alla circonferenza sono uguali, imperocchè la retta* CA *generatrice del Cerchio, nel girare intorno si combacerebbe esattamente con qualunque altra linea* CD, CB, CE, *e però tutte sono uguali (per l' assioma* 5.)

III. *Quindi è chiaro, che se due Cerchj* DF, AE *si tocchino, o si seghino in* F, *non potranno avere un centro comune ad ambidue; imperocchè chi supponesse fosse* C *quel centro comune, congiunta al concorso* F *d' ambi i Cerchj la retta* CF, *e dove le periferie vanno distinte, tirata la* CE, *segante l' altro Cerchio in* D, *esser dovrebbe il raggio* CF *tanto uguale a* CE, *che a* CD, *onde (per l' assioma* 1.) *sarebbe* CE *uguale a* CD, *il tutto alla parte; il che è impossibile (per l' assioma* 6.) FIG. 23.

IV. *Serve poi la circonferenza di qualunque Cerchio a misurare la quantità degli angoli rettilinei, la quale non dipende dalla lunghezza maggiore, o minore delle rette linee, che comprendono detto angolo, ma dalla varia loro inclinazione, che rende essi angoli, o retti, o maggiori, o minori del retto; pertanto descritto col centro* C *qualunque circolo* AGBF, *ovvero* HMIN, *e condotto il diametro* AB *nel primo, o il diametro* HI *nel secondo, ed eretta per lo centro perpendicolare ad* AB *l' altra retta* GF, *che sega il minor cerchio in* NM, *tanto saranno angoli retti* ACG, BCG, *che gli altri due* HCN, ICN, *ed ancora gli opposti* ACF, BCF, *ed* HCM, ICM, *tutti tra di loro uguali (Scolio* 3. *num.* 2.) *e però da que' due diametri essen-* FIG. 24.

sendo divisa in 4. parti l' una, e l' altra circonferenza (come nel seguente numero dimostrerassi) tra di loro uguali, esse misurano li detti angoli retti: cioè divisa qualunque di dette circonferenze in 360 parti uguali (che si chiamano gradi circolari) la quarta parte di essi, che saranno gradi 90., è la misura dell' angolo retto; e se tirasi per lo centro qualunque altra linea DE *inclinata ad* AB, *che farà l' angolo ottuso* ACE, *e l' acuto* ECB, *se nell' arco* AGE *vi sono* 120. *gradi, e nell' arco* EB 60, *quello sarà la misura dell' angolo* ACE, *questo dell' angolo* ECB, *e l' angolo di mezzo* ECG *sarà di gradi* 30., *essendo tale l' arco* GE. *E così ancora nel Cerchio più piccolo sarà* HN *di* 90. *gradi, misura dell' angolo retto* HCN, *ed* HNL *di gradi* 120., *misura dell' angolo ottuso* HCL, *ed* LI *di gradi* 60., *ed* NL *di* 30, *che misurano gli acuti* ICL, LCN; *e così qualunque altro angolo fatto al centro si misura co' gradi dell' arco sottoposto di un Cerchio descritto con qualunque raggio.*

V. *Che la circonferenza dividasi in parti uguali da qualunque angolo uguale fatto al centro, e però sia l' arco intercetto da i lati dell' angolo, la precisa misura di esso, si dimostra così. Tirato nel Cerchio il diametro* ACB, *s' intenda muoversi la porzione* AEB, *rivoltandosi sopra l' altra* ADB; *è manifesto, che soprapposta quella sopra di questa, necessariamente si combaceranno da per tutto; altrimenti, se riuscisse disposta in un sito* AFB, *rimanendo in qualche parte l' arco di essa disposto dentro, o fuori dell' arco dell' altra* ADB, *tirato dal punto* D *al centro* C *il raggio* DC, *segherebbe*

FIG. 25.

rebbe

rebbe l' altra porzione in F, e sarebbe il raggio FC *disuguale al raggio* DC; *il che è assurdo, essendo tutte le rette condotte dal centro alla circonferenza tra di loro uguali, come sopra si è detto al num. 2. Pertanto conviene, che tutti i punti della porzione* AEB, *rivoltata sopra l' altra* ADB, *convengano co' punti di questa, e non si allontanino, o si avvicinino al centro più di essi. Dunque si adatta l' arco* AEB *all' arco* ADB. *E così ancora tirato qualunque altro diametro* DH, *se intorno ad esso si rivoltasse la parte* DAH, *sopra la parte* DBH, *queste pure si combacerebbero insieme; onde tutte le porzioni della circonferenza, segate dal diametro, sono tra loro uguali; e sono la metà dell' intera circonferenza; ed essendo l' angolo* ACE *fatto al centro uguale all' angolo* ECH, *ovvero* ACD, *soprapposti l' uno all' altro, essi angoli si combaceranno, e però gli archi loro, adattandosi pure l' uno sopra l' altro, sono uguali. Dunque la circonferenza circolare deve essere veramente la misura degli angoli, corrispondendo gli archi uguali agli angoli uguali, e i maggiori a' maggiori, ed i minori a' minori.*

VI. *Quindi è, che divisa la circonferenza in* 360. *gradi uguali, la misura dell' angolo retto è* 90. *gradi, che sono la quarta parte di essa, e la metà di esso angolo retto, che è un acuto semiretto, ha per misura* 45. *gradi, ed il suo conseguente ottuso è di gradi* 135. *e così misuransi ancora li maggiori, ed i minori; anzi qualunque grado si divide in* 60. *minuti primi, e qualunque primo minuto in* 60. *minuti secondi, e qualsivoglia secon-*

do

do in 60 minuti terzi; e così proseguendo in infinito, perchè a qualche angolo acuto, ovvero ottuso può corrispondere un arco circolare, non composto di precisi gradi interi, ma di alcuni soli, e di qualche parte di un altro, la qual parte dovrà importare alcuni minuti primi, ed altri secondi, o terzi, o quarti &c. e tale sarà la misura di esso angolo, e quelli angoli saranno uguali, che averanno sotto di se gli archi della stessa misura di gradi, o minuti; ed uno sarà maggiore dell' altro, secondochè corrisponderà ad un arco di più gradi, o minuti.

AVVERTIMENTO.

LE *seguenti Proposizioni si chiamano, o* Problemi, *ne' quali si cerca il modo di fare qualche figura, qualche angolo, o tirarvi qualche linea; o si dicono* Teoremi, *in cui si dimostra qualche proprietà delle figure, e degli angoli, o delle linee, di cui si parla; onde alla prima Proposizione si aggiungerà, essere* Problema, *ed alla seconda, che sia* Teorema, *non aggiungendo però tali titoli alle altre Proposizioni, perchè facilmente si riconosceranno nel loro titolo, se siano Problematiche, o Teorematiche; e da esse ancora si daranno altre definizioni, non ancora quì sopra proposte.*

Non aggiungo nè meno quì i Postulati *proposti da Euclide; bastando che da qualunque Scrittore si possa da un punto all' altro tirarvi una linea retta: ed ancora qualunque linea prolungarla direttamente quanto sarà di bisogno; e da qualsivoglia punto preso per centro, con qualunque intervallo dato, come raggio, o semidiametro, descriverci un Circolo.*

PRO-

PROPOSIZIONE I. PROBLEMA.

Date tre linee rette FA, AB, BE, *delle quali due qualunque prese insieme siano maggiori della terza, formarne il triangolo* ACB.

DAl termine *A* della retta *AB* preso come centro, e con l'intervallo dell'altra retta *AF*, descrivasi il circolo *FCG*; e preso pure l'altro termine *B* per centro, con l'intervallo della *BE*, descrivasi un altro circolo *ECD*: e dove questi Cerchj con le loro circonferenze si segano in *C* (essendo li due raggi di essi maggiori di *AB*, e la stessa *AB* con *BE*, maggiore di *AF*, cioè di *AG* uguale ad *AF*, siccome ancora *AB* con *AF* è maggiore di *BD* uguale a *BE*) si congiungano a' termini dell'altra retta *AB* le rette *CA*, *CB*; sarà fatto *ACB* il triangolo ricercato, essendo il lato *AC* uguale ad *AF* ed il lato *BC* uguale a *BE* (a), e l'altro lato *AB* il medesimo proposto. Dunque è fatto il triangolo compreso dalle tre date linee, come far si dovea.

FIG. 26.

(a) *Scol.* 4. *num.* 2.

COROLLARJ.

I. Se le tre linee proposte fossero tra loro uguali, qualunque circolo passerebbe pel centro dell'altro, essendo tanto *AF* uguale ad *AB*, quanto *BE* uguale alla stessa; onde un tale triangolo *ABC*, composto di tre lati uguali, dirassi *Triangolo Equilatero*.

FIG. 27.

II. E se fossero due sole linee *AF*, *BE* tra di loro uguali, risultandone il triangolo *ACB*, co'

FIG 28.

co' due lati uguali *AC*, *BC*, diraſſi *Triangolo Iſoſcele*, ovvero *Equicrure*.

III. Ma ſe tutte le linee date ſono diſuguali, come nella figura 26., eſſo triangolo *ACB*, in cui *AC* è maggiore di *CB*, e queſta pure maggiore di *AB*, ſi dice *Triangolo Scaleno*.

PROPOSIZIONE II. TEOREMA.

Ne' triangoli BAC, EDF, *ſe intorno agli angoli uguali* A, *e* D *ſaranno i lati dell' uno uguali a quelli dell' altro, cioè AB uguale a* DE, *ed* AC *uguale a* DF; *ſaranno ancora uguali le loro baſi* BC, *ed* EF; *e gli angoli interni, oppoſti a' lati uguali, ſaranno pure tra di loro uguali; e prolungati i lati ſotto alle baſi, ne riuſciranno pure gli angoli eſterni uguali* CBG *ad* FEI, *e* BCH *ad* EFK; *E tutto un triangolo ſarà uguale all' altro*.

FIG. 29. INtendaſi ſoprappoſto un triangolo all' altro: ſi adatterà l' angolo *BAC* all' angolo uguale *EDF*, ed i lati uguali converranno inſieme, *AB* con *DE*, ed *AC* con *DF*; dunque ancora la baſe *BC* ſarà congruente alla baſe *EF*; onde queſte pure ſaranno uguali, adattandoſi l' una ſopra all' altra (a); ed ancora gli angoli interni, e gli eſterni converranno tra loro, e tutto il primo triangolo ſarà adattato, e congruente al ſecondo; però ſaranno uguali tutti gli angoli corriſpondenti, e tutti e' due i triangoli *ABC*, *DEF* ſi moſtreranno uguali. Il che dovea dimoſtrarſi.

(a) *Scol.* 2. *num.* 1.

COROLLARJ.

FIG. 30. I. Eſſendovi una linea retta *AC*, diviſa pel

mezzo

mezzo in *B*, dal qual punto sia la perpendicolare *BE*, di sopra, o di sotto ad essa retta *AC*, sarà qualsivoglia punto *E*, ovvero *D* in essa perpendicolare ugualmente distante da' termini *A*, e *C*; imperocchè, congiunte le rette *AE*, *CE*, ovvero le altre *AD*, *CD*, essendo nel triangolo *ABE*, e nell'altro *CBE* gli angoli di quà, e di là dal punto *B* uguali, perchè retti [(a)], ed il lato *BA* uguale al lato *BC*, ed il lato *BE* comune ad essi, dovrà essere la base *AE* uguale alla base *CE*; e similmente ne' triangoli *ABD*, *CBD* essendo i lati *AB*, *BC* uguali, ed il lato *BD* comune, intorno agli stessi uguali angoli retti *ABD*, *CBD*, saranno pure le basi *AD*, *CD* uguali; dunque qualsivoglia punto *E*, ovvero *D*, preso nella stessa perpendicolare *EB*, è distante ugualmente da' termini *A*, *C* della retta *AC*, divisa in mezzo da quella perpendicolare.

(a) Defin. 10.

II. Similmente sono tra loro uguali gli angoli fatti da esse rette *EA*, *EC* sopra la base *AC*; o ancora con essa perpendicolare *EB*; cioè *EAB* è uguale ad *ECB*, e l'altro *AEB* è uguale a *CEB*: e così ancora sono uguali gli angoli *DAB*, *DCB*, e gli altri *ADB*, *CDB*, tra loro.

III. Può ancora dimostrarsi, che ciascun punto ugualmente distante da essi termini *A*, *C*, deve essere necessariamente situato nella perpendicolare *BE*, che sega in mezzo essa retta *AC*, nè può essere fuori di esa; perchè se si supponesse, che il punto *F* fuori di tale perpendicolo fosse ugualmente distante da *A*, e da *C*, congiunte le rette *AF*, *CF*, sarà da alcuna di queste segata la perpendicolare in *D*, e congiunta dall' altro

FIG. 31.

termine la *AD* sarà uguale a *CD*; dunque le due *FD*, *AD*, saranno uguali ad *FC* (a); ma quelle due *FD*, *AD*, sono maggiori di *AF* (b), dunque ancora *FC* è maggiore di *AF*, onde non è il punto *F* in distanza uguale da *A*, e *C*.

(a) *Assioma* 3.
(b) *Scol.* 2. *num.* 5. e 6.

IV. Dunque ciascun triangolo equicrure *AEC*, ovvero *ADC*, averà sempre il vertice *E*, o pure *D* nella stessa perpendicolare *BE*, condotta dal punto di mezzo della base, e non mai averà il vertice fuori di essa; onde essendo sempre uguali gli angoli *EAB*, *ECB*, ovvero gli altri due *DAB*, *DCB*, sempre dunque il triangolo equicrure ha gli angoli uguali sopra alla base.

V. Anzi essendo in un triangolo due angoli uguali, bisogna che ancora i suoi lati opposti siano uguali, e se un angolo è maggiore dell' altro, il lato opposto al primo sarà maggiore, che l'opposto al secondo; siccome essendosi mostrata *CF* maggiore di *AF*, l'angolo pure *CAF* è maggiore di *BAD*, e però maggiore di *ACF* uguale a questo; e comunque sia tirata la *AF*, che faccia l'angolo *FAC* maggiore di *ACF*, la retta *CF* deve passare oltre la perpendicolare *BE*, e però diventare maggiore *CF* della *AF*, come si è dimostrato nel Corollario 3.

VI. La minima delle rette, condotte dal punto *A* sopra alla retta *BE*, sarà la perpendicolare *AB*, e dell'altre oblique *AD*, *AE*, la più vicina alla perpendicolare è minore della più lontana; perchè prolungata *AB* in *BC* uguale ad essa, e congiunte le *CD*, *CE*; essendo la somma delle esteriori *AE*, *EC* maggiore della somma delle interne *AD*, *DC*, e queste pure maggiori

FIG. 32.

di

di *AC* (a), ancora la metà di esse (essendo *AE* uguale ad *EC*, e *AD* uguale a *DC* per il Coroll. 1.) cioè *AE*, sarà maggiore di *AD*, e questa pure maggiore di *AB* (b), onde questa è la minima di tutte le altre.

(a) Scol. 1. nu. 5. e 6.

(b) Assio. 7.

PROPOSIZIONE III.

TAV. III. FIG. 33.

Vicendevolmente, se ciascun lato d'un triangolo ABC *è uguale al corrispondente lato dell' altro* DEF, *cioè* BC, *ad* EF, BA *ad* ED, *ed* AC *a* DF, *ancora gli angoli opposti a' lati uguali saranno uguali.*

FIG. 34.

SI soprapponga il lato *BC* del primo al lato uguale *EF* del secondo, e verso la medesima parte soprapposti essi triangoli, si adatteranno totalmente, ciaschedun lato soprapponendosi all' altro uguale, onde tutti gli angoli si combagieranno, e saranno però uguali ancora essi (c); altrimenti, se i lati *AB*, *AC* non si adattassero alli uguali *DE*, *DF*, ma gli si ritirassero sopra, o sotto, come nella seconda figura, sarebbero li due lati di sopra *BA*, *CA* maggiori de' due lati di sotto *ED*, *FD* (a), contro il supposto; e se i lati s' intersecassero *AB*, *FD* in *G*, come nella figura terza, essendo *BG* con *GD* maggiore di *BD*, ed ancora *CG* con *GA* maggiore di *CA*; sarebbe pure *AB* con *DF* maggiore di *ED* con *CA*; il che è contro l' ipotesi; essendo la somma delle due prime uguale alla somma delle seconde (d). Dunque veramente si adattano essi lati uguali, onde ancora gli angoli corrispondenti sono uguali. Il che &c.

FIG. 35.

(c) Ass. 5.

(d) Ass. 3.

Co-

COROLLARJ.

I. Si raccoglie da quest' ultimo caso, che se due rette linee *BA*, *FD* si segano in *G*, sono esse maggiori delle rette *DB*, *AF* sottotese agli angoli opposti *BGD*, *AGF*; ed ancora può dedursi, che dagli stessi termini della base *BC* non possono condursi le rette uguali a' lati *BA*, *CA* verso la medesima parte, che insieme convengano in un altro punto *D*, e non nel medesimo punto *A*.

FIG. 36. II. Quindi ancora può dedursi il modo di segare in due angoli uguali un angolo dato *AEF*; perchè tagliata dalla *EF* la parte *EC* uguale all' altra *EA*, e congiunta la *AC*, facendosi sopra di essa dalla parte opposta al dato angolo il triangolo equilatero, o equicrure *ADC*, congiunta la retta *ED* segherà per mezzo esso angolo *AEF*, perchè tutti i lati del triangolo *EAD* uguagliano quelli dell' altro *ECD*, cioè *EA* uguale ad *EC*, ed *ED* lato comune ad ambidue i triangoli, e la base *AD* uguale alla base *CD*; dunque è diviso l' angolo *AEF* negli angoli *AED*, *CED* tra loro uguali.

III. Ancora volendo segare pel mezzo una linea *AC*, fatto sopra alla medesima un triangolo equilatero, o equicrure *AEC*, e diviso pel mezzo l' angolo *AEC* colla retta *EB*, segheraßi pel mezzo in *B* la base *AC*, avendo li triangoli *AEB*, *CEB* intorno l' angolo uguale in ambidue verso *E*, il lato *AE* uguale al lato *EC*, ed il lato *EB* comune, bisogna che ancora le basi *AB*, e *BC* siano uguali (a).

(a) Prop. 2.

IV.

IV. Circa il tirare una linea *EB* perpendicolare ad un altra *AC*, o nel punto *B* assegnato in essa, o dal punto *E* superiore alla medesima: nel primo caso, prese di quà, e di là dal punto *B* due linee uguali *BA*, *BC*, e sopra alla retta *AC* fatto un triangolo equilatero, o equicrure *AEC*, congiunta la *EB* sarà perpendicolare alla base, essendo gli angoli *ABE*, *CBE* uguali per essere ancora uguali i lati opposti *AE*, *EC* ne' triangoli *AEB*, *CEB*, con i lati uguali *AB*, *CB*, e l' altro *EB* comune ad ambidue. Ma nel secondo caso, inclinata qualunque linea *EC* dal dato punto *E* sopra la retta *AC*, e col centro *E*, intervallo *EC* descritto il cerchio *CGA*, la circonferenza del quale segherà la retta *AC* in un altro punto *A*, e divisa questa *AC* pel mezzo in *B*, congiunta *EB* sarà la perpendicolare, perchè tirate le rette *EA*, *EC*, li triangoli *EBA*, *EBC* avendo tutti i lati corrispondenti uguali, devono ancora gli angoli *EBA*, *EBC* essere uguali, e però retti.

FIG. 37.

FIG. 38.

V. Volendo dati due punti *A*, *C* ritrovare un punto *E*, da essi ugualmente distante in una data linea retta, o curva *GF*, congiunta la retta *AC*, e divisa pel mezzo in *B*, gli si alzi la perpendicolare *BE*, che concorra con la linea *GF* nel punto *E*, è manifesto, che congiunte le rette *AE*, *CE* saranno uguali (a), e però li dati punti *A*, *C* saranno dal punto *E* della proposta linea *GF* ugualmente distanti; e se la detta perpendicolare non convenisse con *GF*, non vi sarebbe in essa verun punto ugualmente da essi termini *A*, *C* distante (b).

(a) Prop. 2 Coroll. 1.

(b) Prop. 2. Coroll. 3.

FIG. 39. VI. Tirata nel cerchio qualunque corda *AB*, e dal suo punto di mezzo *F* condotta la perpendicolare *FM*, in essa dovrà essere il centro del cerchio, che da' termini *A*, *B* deve essere ugualmente lontano, essendo uguali tutti i raggi del cerchio (a), non potendo però esso centro essere fuori di tale perpendicolare (b); e tirata qualunque altra corda *DE*, e dal suo punto di mezzo *G* erettavi la perpendicolare *GL*, concorrente con la *FM* in *C*, dovrà questo punto essere il centro del cerchio, dovendo essere tanto in quella, che in questa perpendicolare: però in questa maniera si trova il centro del cerchio, o di qualunque arco dato.

(a) Scol. 4. num. 2.

(b) Prop. 2. Coroll. 3.

PROPOSIZIONE IV.

FIG. 40. *Ne' triangoli* BAC, EDF *essendo uguale il lato* AB *al lato* DE, *ed il lato* AC *al lato* DF, *se l'angolo* A *è minore dell'angolo* D, *sarà la base* BC *parimente minore della* EF.

IMperocchè soprapposto quel triangolo a questo, ed adattatosi il lato *AB* al suo uguale *DE*, l'altro lato *AC* caderà al di dentro, di quà dal suo uguale lato *DF*, essendo l'angolo *BAC* minore di *EDF*; onde il termine *C*, o caderà nella base *EF*, o sopra, o sotto di esso, secondo che l'angolo *ABC* fosse uguale, o minore, o maggiore dell'angolo *DEF*; però sarà sempre *BC* minore di *EF*, adattandosi nel primo caso quella ad una parte di questa; e nel secondo caso le due *AC*, *BC* essendo minori delle altre due *DF*, *EF* (c), siccome *AC* è uguale a *DF*, l'altra *BC* deve

(c) Scol. 2. num 6.

ve essere minore della *EF*; e nel caso terzo, essendo le due *AC*, *EF* maggiori delle due *BC*, *DF* (a), ma la *DF* uguale ad *AC*, bisogna che sia *EF* maggiore della *BC*. Il che doveasi dimostrare.

(a) Prop. 3. Coroll. 1.

COROLLARJ.

I. Ancora viceversa, se si sapesse, che in due triangoli fossero due lati del primo uguali a quelli del secondo, ma la base di quello minore della base di questo, sarà pure l' angolo verticale del primo minore di quello del secondo: perchè se tali angoli fossero uguali, ancora le basi loro sarebbero uguali (b), e se l' angolo del primo fosse maggiore di quello del secondo, ancora la base di quello sarebbe maggiore della base di questo, contro l' ipotesi.

(b) Prop. 2.

FIG. 41.

II. Se in qualunque triangolo *EFD* fosse un angolo *EDF* maggiore di un altro *DEF*, il lato *EF*, opposto all' angolo maggiore, deve pure essere maggiore del lato *DF* opposto all' angolo minore; imperocchè supposto dentro l' angolo maggiore *EDF*, l' angolo *EDH* uguale al minore *DEF*, sarà la retta *DH* uguale ad *EH* (c), e però le due *DH*, ed *HF* sono uguali alla *EF*; ma quelle due sono maggiori della *DF*, dunque ancora la *EF* è maggiore di essa *DF*.

(c) Prop. 2. Coroll. 5.

PROPOSIZIONE V.

FIG. 42

Delle rette condotte alla circonferenza di un cerchio da un punto D, *distante dal centro* C, *la* DB, *che passa pel centro, è la massima di tutte, la* DA, *per cui non passa il centro, ma è in diretto alla* DB, *sarà la minima, e dell' altre* DE, DF,

DI, DH, *la più vicina alla massima è maggiore della più lontana, e la più vicina alla minima è minore della più rimota da essa.*

IMperocchè congiunti i raggi, essendo *CB* uguale a *CE*, aggiuntavi la *CD*, saranno le due *CE*, *CD* uguali alla intera *DB*; ma quelle due sono maggiori della terza *DE*, dunque *DB* è maggiore della *DE*. Poscia essendo l' angolo *ECD* maggiore dell' angolo *FCD*, ne' triangoli *DCE*, *DCF*, che hanno il lato *CE* uguale al raggio *CF*, ed il lato *CD* comune, e però uguale in ambidue i triangoli, la base *DE* sarà maggiore della *DF* [a], dunque la più prossima *DE* alla massima *DB* e maggiore della *DF* più lontana dalla stessa. Similmente ne' triangoli *CID*, *CHD*, che hanno i lati uguali *CI*, e *CH*, ed il comune *CD*, e l' angolo *DCI* è minore dell' angolo *HCD*; la base *DI* è minore della *DH*, ed ancora la *DA* è minore della stessa *DI*, perchè *CD* con *DI* è maggiore di *CI*, e però è maggiore della *CA* uguale a *CI*; dunque tolto di comune *CD*, ancora la *DI* sarà maggiore della *DA*, la quale però è la minima di tutte, e le più prossime ad essa riescono minori delle più lontane. Il che dovea dimostrarsi.

(a) Prop 4.

COROLLARJ.

I. Due linee però solamente possono essere uguali, una condotta da una parte, e l' altra dall' altra parte del diametro, come sarà *DF* uguale a *DG*, e *DH* uguale a *DK*, quando seghino di quà, e di là dal diametro due archi uguali, come

me AF è uguale ad AG, ed AH uguale ad AK, onde l'angolo DCF uguaglia l'angolo DCG, e l'angolo DCH è uguale all'altro DCK, onde avendo per lati uguali i raggi, ed il lato DC comune, le loro basi riescono uguali.

II. Onde, se da un punto si trovassero condotte alla circonferenza più di due linee uguali. esso punto sarebbe il centro di esso cerchio, mentre dal punto, che non è centro, non se gli possono condurre più di due linee uguali.

III. Quindi due cerchj AFE, DBE non possono segarsi, se non in due punti, come A, e B; che se convenissero ancora in altri punti, per esempio in E, dal centro C di uno di essi condotte le rette CA, CB, CE, tra di loro uguali, dovrebbe lo stesso punto C essere centro ancora dell'altro cerchio; il che è impossibile [a]; dunque &c.

FIG. 43.

(a) Scol. 4. num. 3.

PROPOSIZIONE VI.

Se dal termine B del raggio CB gli si tira sopra la perpendicolare ABE, *non potrà concorrere con altro punto del cerchio; onde questa si chiamerà la sua* Tangente.

FIG. 44.

Imperocchè tirata dal centro C a qualunque altro punto E di essa perpendicolare la retta CE, sarà questa maggiore della CB [b]; dunque è maggiore del raggio CH; e però qualsivoglia altro punto della retta ABE essendo dal centro più lontano di qualunque raggio, non concorre essa linea con la circonferenza, se non nell'unico punto B, ove la tocca; e però questa linea perpendicolare al raggio nel termine di esso, dicesi tangente del circolo. Il che &c.

(b) Prop. 2. Coroll. 6.

COROLLARJ.

I. Vicendevolmente se una retta AB tocca il cerchio, congiunta la retta CB dal centro al contatto, gli sarà perpendicolare; altrimenti supponendo, che la sua perpendicolare condotta dal centro C, fosse un altra CE, sarebbe essa minore di CB, cioè del raggio CH, e riuscirebbe il tutto minore della parte; il che è impossibile.

FIG. 45. II. Qualunque altra retta linea BF condotta dallo stesso punto B segherà il cerchio, perchè dal centro tiratavi la perpendicolare CG, essendo questa minore del raggio CB, è pure minore del raggio CI; dunque si distende BF sotto l'arco circolare BIN, e però sega il cerchio.

III. Dunque l'angolo ABI, che dicesi *Mistilineo*, contenuto dalla retta BA, e dalla curva BI, è minore di qualsivoglia angolo acuto rettilineo ABF; e l'angolo pure Mistilineo DBI, contenuto dal diametro DB, e dalla circonferenza $BIND$, è maggiore di qualunque angolo acuto DBF, perchè facendo la BF con la tangente qualunque minimo angolo acuto, e col diametro qualsivoglia angolo acuto molto grande, cade dentro il cerchio, onde l'angolo mistilineo ABI è sempre minore di qualunque acuto ABF; e l'angolo DBI è sempre maggiore dell'altro acuto DBF.

IV. Quindi se la retta BD girasse intorno al punto B, passerebbe da un estremo all'altro, senza passare pel mezzo; cioè farà col diametro un angolo acuto, che sempre diventerà maggiore, secondo che più si allontana da esso, continuando

do il ſuo giro; e ſempre tale angolo acuto ſarà minore del miſtilineo CBI; poi arrivando eſſa linea moſſa ſopra la tangente BA, farà col diametro l'angolo CBA retto maggiore di eſſo CBI, nè mai in ſito veruno gli averà fatto un angolo uguale.

V. Se al cerchio ſaranno condotte due tangenti BA, HA, concorrenti inſieme in A; o ſe dal detto punto A ſiano tirate eſſe tangenti AB, AH, ſaranno tra di loro uguali; perchè condotti dal centro C i raggi CB, CH a' punti del contatto, faranno angoli retti; e congiunta la BH, eſſendo il triangolo BCH equicrure, gli angoli CBH, CHB, ſaranno uguali (a); cavati dunque queſti dagli uguali angoli retti CBA, CHA, li rimanenti ABH, AHB ſaranno pure uguali (b); dunque le rette AH, AB tangenti ſono pure uguali tra loro (c).

FIG. 46.

(a) Prop. 2. Coroll. 4.

(b) Aſſ. 3.

(c) Prop. 2 Coroll. 5

VI. Congiunta poi al centro C dal concorſo delle tangenti A la retta CA, dividerà pel mezzo gli angoli BCH, e BAH, e ſarà perpendicolare alla corda BH, facendovi gli angoli retti in D, ove pure ſarà eſſa BH diviſa pel mezzo; imperocchè li triangoli ABC, AHC avendo i lati corriſpondenti l'uno all'altro uguali, devono ancora gli angoli loro oppoſti eſſere uguali, cioè BCA, ed HCA; e CAH con CAB (d). Onde ancora ne' triangoli BCD, HCD eſſendo il lato BC uguale a CH, e la CD lato comune, intorno gli angoli uguali BCD, HCD, la baſe BD ſarà uguale alla baſe DH, ed ancora gli angoli corriſpondenti uguali; cioè CDB uguale a CDH, e però ambidue retti (e).

(d) Prop. 3

(e) Prop. 2.

PRO-

PROPOSIZIONE VII.

FIG. 47. *Se due cerchj* GFE, BFD *si toccano in* F *al di dentro, o al di fuori, la retta, che congiunge il centro* C *del primo col centro* A *del secondo, passerà per il loro contatto* F.

ALtrimenti, supponendo, che il centro *A* del cerchio *BFD* non fosse nella retta *CF*, che connette il centro *C* dell' altro cerchio *GFE*, col comune loro contatto *F*, ma che fosse nel punto *a* fuori di essa *CF*, onde la retta *Ca*, congiungente i centri, segasse il cerchio maggiore in *E*, ed il minore in *D*, ne seguirebbe, che essendo nel cerchio *GEF* dal punto *a* tirata pel centro *C* la *a C*, sarebbe la rimanente *a E* la minima (a), è pero minore della *a F*; ma supponendosi *a* il centro del cerchio *BFD*, sarà pure *a D* uguale ad *a F*; dunqne *a E* sarebbe minore della *a D*, il tutto della parte; il che è impossibile; dunque esso centro del cerchio *BFD* non è fuori della *CF* in *a*, ma nel punto *A*, dentro la stessa retta; però la linea, che connette i centri de' circoli, che si toccano, passa per il loro contatto. Il che &c.

(a) Prop. 5.

COROLLARJ.

I. E' chiaro, che ancora i cerchj si toccano in un solo punto; altrimenti, condotte dal centro *A* del cerchio *BFD* più linee a' punti, con cui si connettesse il contatto con l' altro cerchio *GFE*, sarebbero tali linee tutte uguali ad *AF*, la quale è la minima, tirata da *F* alla circonfe-

renza

renza *GFE* (a), onde non può averne altre uguali, tirate dal medesimo punto sopra a quell' arco.

(a) Prop. 5.

II. Ne segue ancora da ciò, che due cerchj, i di cui centri sono *C*, ed *A*, descritti per un punto *F* della stessa linea *CA*, ivi si toccheranno; perchè essendo *AF* la minima, condotta da *A* al cerchio del centro *C*, essa è minore di *AE*, dunque ancora il raggio *AD* è minore della retta *AE*, e però le circonferenze di tali cerchj non sono insieme congiunte, se non nel punto *F*, per cui passano i raggi *CF*, ed *AF* descrivendo i cerchi *FEG*, *FDB*, che in esso *F* conseguentemente si toccano.

FIG. 48.

PROPOSIZIONE VIII.

TAV. IV. FIG. 49.

Se le due rette BE, CF *sopra l' altra retta* BC *hanno due angoli interiori* ABC, *ed* ACB *uguali a due retti, esse linee prolungate verso qualunque parte, non potranno convenire insieme, e però si diranno* Parallele.

SE potessero convenire, si congiungano in *A*, e prolungata la *AC* in *CD* uguale alla *BA*, si congiunga *BD*, sarà il triangolo *BCD* uguale all' altro *BCA*, perchè essendo gli due angoli *ABC*, e *BCA* uguali a due retti, ed ancora a due retti essendo uguali *DCB*, e *BCA*, dunque l' angolo *ABC* è uguale a *DCB*, ed il lato *AB* uguale a *CD*, ed il lato *BC* comune, dunque ancora la base *AC* sarà uguale a *BD*; sicchè *BD*, e *BA* essendo uguali ad *AC*, e *CD*, cioè alla retta *AD*, sarebbero due lati del triangolo *ABD* uguali alla base; il che è impossibile; dunque

non

non può essere, che le linee rette BE, CF, avendo gli angoli, fatti sopra alla retta BC, uguali a due retti, convengano insieme in A; ma non convenendo da veruna parte insieme (perchè ancora dalla banda opposta sarebbero con la BC gli angoli uguali a due retti) si diranno linee *Parallele*. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Dunque in ogni triangolo i due angoli interni verso qualunque suo lato, sono minori di due retti; onde prolungando qualsivoglia lato BC in L, l' angolo esterno ACL sarà maggiore di qualunque delli due interni opposti ABC, o BAC, perchè ciascheduno di questi con l' altro ACB è minore di due retti, ma il detto esterno ACL, col medesimo ACB, uguaglia i due retti.

FIG. 50. II Se in due rette linee AB, GE, segate dalla retta FCD riusciranno uguali gli alterni ACD, CDE, o pure l'esterno FCB, con l'interno opposto CDE saranno esse linee AB, GE parallele; perchè siccome l' angolo BCD con l' altro ACD, ed ancora con l'esterno conseguente FCB, forma due angoli uguali a due retti così essendo CDE uguale all' alterno ACD, ed all' esterno FCB, saranno li due angoli interni BCD, CDE uguali a due retti, e però le linee AB, GE non possono insieme convenire, onde sono parallele.

III. Viceversa, se le linee AB, GE si suppongono parallele, qualunque retta FCD, che le seghi, farà gli angoli alterni uguali, e l' esteriore uguale all' interno opposto, e gli due interni BCD,

EDC

EDC uguali a due retti, perchè se ivi, o dall' altra parte li conseguenti fossero minori di due retti, prolungate esse linee converrebbero insieme, facendo un triangolo colla base *DC*; e però devono essere ancora gli angoli alterni *EDC*, *ACD* uguali, e l' esterno *BCF* uguale all' interno opposto *EDC*.

IV. Se due linee *HL*, *AB* sono parallele ad una terza *EG*, saranno ancora tra di loro parallele, perchè tirata la segante *FICD*, essendo *HL* parallela ad *EG*, sarà l' angolo esterno *HIF* uguale all' interno opposto *EDC*: Similmente essendo *AB* parallela alla stessa *EG*, ancora l' angolo esteriore *ICB* sarà uguale allo stesso *EDC*; dunque ancora *HIF* sarà uguale al medesimo *BCI*, dunque le rette *AB*, *HL* sono parallele. FIG. 51.

V. E' facilissimo il tirare da un dato punto *C* una parallela alla retta *EG*, perchè tirata sopra di questa qualunque retta *CD*, e fatto dalla parte alterna l' angolo *DCA* uguale a *CDE*, riuscirà *CA* parallela ad *EG*.

PROPOSIZIONE IX.

In qualunque triangolo ABC *prolungato il lato* AC *in* D, *sarà l' angolo esterno* BCD *uguale alla somma delli due interni opposti* CAB, *ed* ABC; *e tutti tre gli angoli interni sono uguali a due retti.* FIG. 52.

SI tiri dal punto *C* la retta *CE* parallela al lato *AB*, sarà l' angolo *BCE* uguale all' alterno *ABC*, e l' esteriore *ECD* uguale all' interno opposto *CAB* (a), dunque l' angolo esterno *BCD*, uguale

(a) Prop. 8. Coroll. 3.

uguale a que'due *BCE*, *ECD*, farà pure uguale alli due interni oppofti *ABC*, e *CAB*; onde aggiuntovi di comune l' altro angolo interno *ACB*, faranno li tre angoli interiori uguali alli due *ACB*, e *BCD*, e però uguali a due retti. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Tutti li tre angoli d'un triangolo faranno uguali a tutti li tre angoli di qualunque altro triangolo, effendo tanto quefti, che quelli a due retti uguali.

II. Anzi fe due angoli d'un triangolo fono uguali a due angoli d'un'altro, ancora il terzo angolo di quello farà uguale al terzo di quefto.

III. E ne' triangoli, che hanno un angolo retto, gli altri due angoli fono pure ad un retto uguali.

FIG. 53. IV. In qualunque triangolo equicrure *ABC* effendo gli angoli fopra la bafe uguali, prolungato uno de' lati uguali *BC* in *D* farà l'angolo efterno *ACD* duplo di qualunque degli angoli interni oppofti *CBA*, o *CAB*, effendo uguale alla fomma di ambidue tra loro uguali.

V. Onde nel cerchio l'angolo fatto al centro è fempre doppio di quello fatto alla circonferenza, da' medefimi punti dell' arco tirati i lati loro, cioè l' angolo *DCA* è duplo dell' angolo *DBA*; e parimente condotto un altro raggio *CE*, e congiunta la retta *EB*, farà l' angolo *DCE* duplo dell' altro *DBE*; onde ancora il rimanente *ECA* farà duplo del refiduo *EBA*.

FIG. 54. VI. Quindi nel femicircolo, tirate due linee da' ter-

ermini del diametro a qualunque punto della circonferenza, si farà ivi l' angolo retto; perchè essendo l' angolo *DCA* duplo di *ABC*, e l'altro *DCE* duplo di *EBC*, e gli due angoli *DCA*, e *DCE*, che sono uguali a due retti, essendo il doppio dell' angolo *ABE* descritto nel semicircolo, conviene che questo sia veramente un angolo retto.

VII. In qualunque figura rettilinea *ABDEF* FIG. 55. tutti gli angoli interni sono uguali a tal numero di retti, qual' è il doppio numero de' lati, levatine quattro; imperocchè, preso nella figura qualunque punto *C*, ed indi condotte a ciascun angolo le rette *CA*, *CB*, *CD*, *CE*, *CF*, ne risultano tanti triangoli, quanti sono i lati di tale figura; dunque gli angoli di essi triangoli sono uguali a tante paia di retti, quanti sono essi lati della figura; agli angoli della quale essendo congruenti quelli di tali triangoli, eccettuati quelli, che sono intorno al loro vertice *C*, li quali uguagliano quattro angoli retti, dunque il numero de' retti, attenenti ad essa figura, è doppio del numero de' suoi lati, detrattine quattro.

VIII. Gli angoli poi esterni, che risultano, prolungato qualunque lato, cioè *GAF*, *HFE*, *IED*, *KDB*, *LBA*, in qualunque figura saranno sempre uguali a quattro retti; perchè questi con gli angoli interni fanno tante paia di retti, quanti sono i lati; dunque essendo li soli interni uguali a tante paia di retti, quanti sono essi lati, detrattone quattro, bisogna, che a questo numero di quattro retti corrispondano gli angoli esterni; onde gli esterni di

una figura uguagliano quelli di qualunque altra, che sia composta di più, o di meno lati.

PROPOSIZIONE X.

FIG. 56. *Essendo uguali le parallele* AB, DC, *tirate le rette* AC, BD, *che ne congiungono i termini dalla stessa parte, saranno esse ancora uguali, e parallele; e dirassi questa figura un* Parallelogrammo.

IMperocchè congiunti gli angoli opposti con la retta *AD*, ne' triangoli *ABD*, *ACD* essendo gli angoli alterni *BAD*, *ADC* uguali, ed il lato *AB* uguale a *DC*, e l' altro *AD* comune ad ambidue, sarà la base *BD* uguale alla base *AC*, e l' angolo *BDA* uguale all' alterno *CAD*; dunque ancora esse linee *BD*, *AC* sono uguali, e parallele. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Vicendevolmente in qualunque parallelogrammo, che ha le linee opposte parallele *AB* a *DC*, ed *AC* a *BD*, esse linee opposte saranno uguali, perchè essendo uguali gli angoli alterni *BAD*, *ADC*, e gli altri due alterni *BDA*, *DAC*, e la retta *AD* comune a' triangoli *ABD*, *ACD*; se si soprapponesse l' uno all' altro, rivoltando esso triangolo *ADC*, coll' angolo *CDA*, dalla banda *A*, e l' angolo *CAD* dalla banda *D*, adattandosi gli angoli uguali sopra l' uguale base *DA*, e *AD*, ancora i lati *DC*, *AB* si concorderanno insieme, e gli altri lati ancora *AC*, *DB* converranno insieme; dunque sono le opposte linee uguali nel parallelogrammo. II.

II. Ancora gli angoli opposti *B*, e *C* saranno uguali; siccome pure si uguagliano gli opposti *BAC*, *CDB*.

III. La retta *AD* parimente divide pel mezzo il parallelogrammo in due triangoli uguali *ABD*, *DCA*; ed essa linea congiungente gli angoli opposti dicesi pure il diametro del parallelogrammo.

PROPOSIZIONE XI.

I parallelogrammi ACDB, ECDF *eretti sopra la stessa base* CD, *e tra le medesime parallele* AF, CD, *sono uguali tra loro.* FIG. 57.

IMperocchè le due rette *AB*, *EF* essendo alla opposta *CD* uguali, saranno uguali tra loro, ed aggiunta all'una, e all'altra la *BE*, sarà *AE* uguale a *BF*; ed è pure *AC* uguale a *BD*, e l'angolo esterno *BDF* uguale all'interno *CAE*; dunque sono uguali i triangoli *ACE*, *BDF*, e nella prima figura segandosi in *G* le rette *CE*, *BD*, tolto di comune *BGE* a' detti triangoli, rimangono uguali i trapezj *ABGC*, ed *EGDF*, onde aggiunto ad essi di comune l'altro triangolo *CGD*, rimane il parallelogrammo *ACDB* uguale all'altro *ECDF*; ma nella seconda figura aggiunto il trapezio *CEBD* a quei triangoli uguali *ACE*, *BDF*, riesce pure il parallelogrammo *ACDB* uguale all'altro *ECDF*. Il che &c. FIG. 58.

COROLLARJ.

I. Se con gl'intervalli de' lati uguali *AC*, *BD* del parallelogrammo *ACDB*, si descriveranno FIG. 59.

dentro le parallele due archi circolari uguali CE, DF, farà ancora la figura $CEFD$, compresa da detti archi, e dalle medesime parallele, uguale al parallelogrammo $ACDB$, perchè essendo uguali i settori ACE, BDF, tolta nella prima figura la porzione BGE, ed aggiunta CGD, riesce $ABDC$ uguale a $CEFD$; e nella figura seconda aggiunto a quei settori lo spazio $CEBD$, riesce pure $ACDB$ uguale a $CEFD$.

FIG. 60. Lo stesso accade ne' semicircoli interi tra loro uguali AEC, BFD tra le stesse parallele descritti; perchè aggiuntovi lo spazio $CEABD$, riesce il parallelogrammo $ACDB$ uguale pure alla figura $CEABFD$; e così pure seguirebbe, se vi fossero altre curve simili, ed uguali.

FIG. 61. II. Se i parallelogrammi $ABDC$, $EFIH$ sopra le basi uguali CD, HI, sono descritti tra le medesime parallele CI, AF, essi pure saranno uguali; imperocchè essendo EF uguale ad HI, sarà pure uguale a CD, e congiunte le rette CE, DF, si farà il parallelogrammo $CEFD$, cui sarà uguale $ABCD$, avendo con esso la stessa base CD; e gli sarà ancora uguale $EFIH$, avendo con esso la stessa base EF; dunque $ABDC$ è uguale ad $EFIH$.

FIG. 62. III. Quindi, se si adattano alli due lati AC, BD gli archi circolari uguali AMC, BND, ed agli altri lati EH, FI, altri archi uguali EK, FL, o altre curve pari, sarà similmente lo spazio $AMCDNB$ uguale all' altro $EKLF$, essendo quello uguale al parallelogrammo $ABDC$, e quest' altro uguale all' altro parallelogrammo $EFIH$, uguale a quello; e se questi archi si sega-

gano in *G*, ancora tolto *KGD*, resta *CMABNGK* uguale all' altro spazio *EGDLF*.

PROPOSIZIONE XII.

FIG. 63.

I triangoli CAD, CED *sopra la stessa base* CD *descritti, co' vertici* A, E *nella medesima retta parallela alla sua base, saranno uguali; ed ancora i due triangoli* CAD, DFG *fatti nelle medesime parallele sopra basi uguali* CD, DG *sono uguali.*

IMperocchè tirata la *CB* parallela a *DA*, e la *DF* parallela a *CE*, saranno li due parallelogrammi *ABCD*, *EFDC* uguali; ma il triangolo *CAD* è la metà del primo parallelogrammo, e l' altro triangolo *CED* è la metà del secondo, dunque essi triangoli sono uguali E similmente paragonato il parallelogrammo *ABCD* ad un altro *EFGD*, che hanno le basi uguali nelle medesime parallele, si trovano uguali; dunque ancora i triangoli *CAD*, *DFG*, che sono la metà di essi, devono essere uguali. Il che &c.

COROLLARJ.

FIG. 64.

I. In qualunque triangolo *DAC*, divisa pel mezzo in *E* la base *DC*, e congiunta al vertice la *AE*, sarà esso triangolo diviso in due triangoli uguali *DAE*, *CAE*; e nel triangolo *BAC* divisa in tre parti la base *BC* ne' punti *D*, *E*, e congiunte al vertice le rette *AD*, *AE*, resta diviso esso triangolo in tre triangoli uguali; e similmente divisa la base in quante parti uguali si voglia, resterà diviso il triangolo con le rette

condotte al vertice in altrettanti triangoli uguali, per essere il loro vertice nella medesima linea *AF* parallela alla base.

FIG. 65. II. Dato un punto *D* nel lato *AB* del triangolo *ABC*, si può da esso tirare una linea, che tagli dal medesimo triangolo qualunque richiesta parte: in questa maniera. Congiunta all' angolo *C* opposto la retta *CD*, e nel lato *AB* presa la porzione *BF*, che sia tal parte di esso lato, quale si vorrebbe essere la porzione del triangolo da segarsi pel punto *D*; per esempio se si vuole essere il terzo, sia *BF* la terza parte di *BA*, e condotta *FE* parallela a *DC*, segante il lato *BC* in *E*, si congiunga *DE*; sarà il triangolo *BED* quella porzione, che si voleva dell' intero *ABC*, cioè la terza parte di esso: perchè congiunta *CF* sarebbe *BCF* un terzo di *BCA*; ed essendo *EDF* uguale ad *ECF*, aggiunto *BEF* all' uno, e all' altro, sarà pure *BED* uguale a *BCF*; dunque ancora *BED* è la terza parte del triangolo *ABC*; e così di qualunque altra porzione può farsi.

FIG. 66. III. Volendosi fare al triangolo *ABG* un parallelogrammo uguale, divisa la base *BG* per mezzo in *C*, e per il vertice *A* condotta la *AE* parallela alla base *BG*, sopra la *BC* metà della base tirate alla parallela due altre linee parallele *BE*, *CF*, sarà *BCFE* uguale al dato triangolo *ABG*; perchè congiunta la *CA*, e la *BF*, tanto *BCFE* è doppio del triangolo *BFC*, che *BAG* è doppio di *BAC*, e sono *BFC*, *BAC* triangoli uguali, dunque ancora *BAG* è uguale al parallelogrammo *BCFE*. che pure è il doppio di

di qualunque triangolo *BAC* sopra la stessa, o sopra ugual base, e tra le medesime parallele posto, siccome è il doppio del triangolo *BFC* fatto dal suo diametro.

IV. Quindi ogni triangolo *ABG* è uguale al prodotto della metà di sua base nella perpendicolare, condottavi sopra dal vertice; perchè sopra la base *BG* condotta la perpendicolare *AD*, ed alla stessa *AD* tirate parallele *BE*, e *CF* da' termini della *BC*, metà della base *BG*, è il triangolo uguale al parallelogrammo rettangolo *BCFE*, che è il prodotto della metà di essa base *BC* nel lato *CF*, uguale alla perpendicolare *AD*.

FIG. 67

V. Onde può trovarsi la misura di qualunque spazio rettilineo *AFBGC*, tirate le rette da un angolo agli altri, come *AB*, *AG*, dividendolo in più triangoli *AFB*, *ABG*, *AGC*, li quali possono misurarsi, tirando le perpendicolari sopra le loro basi, e moltiplicando essa perpendicolare con la metà della base. Per esempio, se *AB* è uguale ad 8 braccia, e la perpendicolare *FH* fosse 3 braccia, moltiplicando il 3 nella metà di 8, cioè in 4, si fa 12 braccia quadre, per misura del triangolo *AFB*; se *BG* è di 6 braccia, e condottavi la perpendicolare *AD*, che sia braccia 7, moltiplicando 7 nella metà di 6. che è 3, si fa 21 braccia quadre, che è la misura del triangolo *ABG*; ed essendo *AG* braccia 10, la di cui metà è 5, condottavi la perpendicolare *CE* uguale a 4; moltiplicandosi si fanno 20 braccia per misura del triangolo *ACG*; onde tutto lo spazio rettilineo *AFBGC* comprenderà 53 braccia quadre, essendo tale il complesso di 12,

e 21, e 20, ritrovate in que' triangoli ivi compresi.

FIG. 68. VI. Finalmente si cava da questa proposizione, che se sopra la medesima linea retta *BF* fossero con la stessa base, o con le basi uguali *BC*, *EF* due triangoli uguali *BAC*, *EDF*, la retta *AD*, che congiunge i loro vertici, sarà parallela alla base; imperocchè se dal punto *A* tirata una tale parallela, non passasse per l' angolo *D*, ma segasse il lato *ED* sotto, o sopra in *G*, congiunta *FG*, sarebbe il triangolo *EGF* uguale all' altro *BAC*, e però ancora ad *EDF*, onde sarebbe la parte uguale al tutto; il che è impossibile.

PROPOSIZIONE XIII.

In qualunque parallelogrammo AFGH *tirato il diametro* AG, *e per un punto* D *di esso tirate le parallele a' lati* BDE, CDI, *riusciranno uguali i parallelogrammi* EDCF, BDIH, *che diconsi* Complementi *di esso parallelogrammo* AFGH.

TAV. V. FIG. 69. IMperocchè essendo il triangolo *AGF* uguale all' altro *AGH*, e ne' parallelogrammi *ACDB*, ed *IDEG* essendo il triangolo *ADC* uguale a *DAB*, e l' altro *DEG* uguale a *DIG*; dunque il resto *EDCF* è uguale al residuo *BDIH*, che sono i Complementi.

COROLLARJ.

FIG. 70. I. Dato un triangolo *LFN*, si può fargli uguale un parallelogrammo di qualunque lunghezza, e con

e con qualsivoglia angolo dato; perchè nella retta della base *FN* presa *FE* uguale alla metà di essa, e fatto l' angolo *EFC* uguale al dato, indi tirata *ED* parallela ad *FC*, le quali concorrano con la *CL* tirata dal vertice *L* parallela alla base, riuscirà il parallelogrammo *EFCD* uguale al dato triangolo *FLN* (a); e prolungata la *CD* in *I*, sicchè sia *DI* uguale alla proposta lunghezza, che si vuole abbia il parallelogrammo uguale al dato triangolo, si compisca il parallelogrammo *DIGE*, e tirato il diametro *GD*, che convenga con il lato *FC* in *A*, si tiri *AH* parallela alla stessa *DI*, segata da' lati *ED*, *GI*, in *B*, *H*, sarà il parallelogrammo *IDBH* uguale ad *EFCD* (essendo questi i complementi di *AFGH*) e però uguale al triangolo *LFN*; ed ha la lunghezza data *DI*, e l' angolo *BDI* uguale ad *EDC*, ed al dato *CFE* (b); dunque si è fatto ciò, che chiedevasi

(a) Corol. 3. Prop. 12.

(b) Corol. 2 Prop. 10

II. Così ancora qualunque figura rettilinea può ridursi in un parallelogrammo di qualche data lunghezza, e con l' angolo dato, potendo essa figura misurarsi, come si è fatto nel Corollario V. della precedente Proposizione, e però ridursi ancor essa in un triangolo, che abbia la detta misura: Per esempio, in quel Corollario essendosi trovata quella figura rettilinea uguale a 53 braccia quadre, può ridursi ad un triangolo, che abbia 12 braccia per base, ed 8 con $\frac{5}{6}$ di braccio per altezza, perchè la metà della base essendo braccia 6, e la perpendicolare 8 $\frac{5}{6}$, moltiplicando questa in quella, ne riesce 53 braccia quadre, misura di quello spazio rettilineo.

PRO-

PROPOSIZIONE XIV.

FIG. 71. *Nel medesimo segmento* ABDE *di un cerchio, ciaschedun angolo* ABE, ADE, *fatto nell' arco circolare con le rette condotte a' termini della sua corda* AE *sarà di uguale grandezza.*

PErchè condotti al centro i raggi *AC*, *EC*, l' angolo è doppio di qualunque altro *ABE*, o *ADE* fatti all' arco (a); dunque essi angoli nel medesimo segmento sono tra di loro uguali. Il che &c.

(a) Corol. 5. Prop. 9.

COROLLARJ.

I. Viceversa, se gli angoli fatti sopra la medesima retta *AE*, cioè *ABE*, *ADE*, sono uguali, per gli stessi punti *A*, *B*, *D*, *E*, potrà passare il medesimo arco circolare; perchè se passasse solamente per li tre punti *A*, *E*, *D*, ma non pel quarto *B*, anzi segasse la retta *EB* in *F*, congiunta *AF*, riuscirebbe l' angolo *AFE* uguale ad *ADE*, essendo nel medesimo segmento; dunque ancora *AFE* sarebbe uguale all' interno opposto *ABF*; il che è impossibile (b).

(b) Corol. 1. Prop. 8.

II. Qualsivoglia quadrilatero *ABCD* inscritto nel cerchio ha gli angoli opposti uguali a due retti; perchè tirate le rette *AC*, *BD*, gli angoli *ACB*, *ADB*, che sono nel medesimo segmento circolare, saranno uguali, e sono uguali ancora li due *ACD*, *ABD*; dunque l' angolo *DCB*, che è uguale alli due *ACB*, *ACD*, uguaglia li due *ADB*, *ABD*; dunque aggiuntovi l' angolo *BAD*, li due angoli opposti *DCB*, e *BAD* sono

FIG. 72.

ſono uguali agli angoli del triangolo *ABD*; dunque ſono due retti.

III. Prolungato fuori del cerchio il lato *BA* in *E*, ſarà l' angolo eſterno *EAD* uguale all' interno oppoſto *DCB*, perchè ancora *EAD* con lo ſteſſo *BAD* fa due angoli retti.

IV. Dunque ſe in un quadrilatero li due angoli oppoſti ſono uguali a due retti, potrà paſſare un cerchio per li quattro angoli di eſſo; perchè ſe paſſaſſe per gli tre punti *A*, *B*, *C*, ma non per *D*, anzi ſegaſſe la retta *CD* in *F*, congiunta *AF*, ſarebbero gli angoli *ABC*, *AFC* uguali a due retti, ma ſono a ciò uguali queſti due *ABC*, *ADC*, dunque ſarebbe l' angolo *ADC* uguale all' altro *AFC*; il che è impoſſibile, eſſendo l' eſterno maggiore dell' interno oppoſto nel triangolo *ADF*.

PROPOSIZIONE XV.

Se la retta AF *tocca il cerchio in* A, *e la retta* AD *ſega eſſo cerchio in* D, *l' angolo* FAD *fatto dalla tangente, e dalla ſegante, ſarà uguale all' angolo* ABD *fatto nell' alterna porzione del cerchio; e così ancora l' angolo* EAD *ſarà uguale all' angolo* AGD *fatto nell' altro alterno ſegmento.* FIG. 73

IMperocchè congiunto il contatto *A* col centro *C*, e tirato il diametro *ACB*, congiunta la *BD*, ſarà l'angolo *ADB* retto [(a)], dunque li due ſuſſeguenti di eſſo triangolo, *ABD*, e *DAB* ſono uguali ad un retto, cioè all' angolo *BAF*, che comprende appunto li due *DAF*, e *DAB*; dun-

(a) Corol. 6. Prop. 9.

dunque DAF bisogna che sia uguale all'altro ABD, fatto nell'alterno segmento; e perchè ancora AGD con ABD sono uguali a due retti (a), e però alli due DAF, DAE essendo DAF uguale ad ABD, l'altro DAE sarà pure uguale ad AGD; dunque l'angolo contenuto dalla tangente, e da qualunque segante uguaglia l'angolo, che riesce nell'alterno segmento del cerchio. Il che &c.

(a) Corol. 2. Prop. 14.

COROLLARJ.

I. Quindi è chiaro, che essendo il segmento, un mezzo cerchio, l'angolo ADB in esso descritto uguaglia l'angolo retto CAE; nel segmento poi maggiore l'angolo ABD è sempre acuto, perchè uguaglia l'angolo DAF; e nel segmento minore l'angolo AGD è ottuso, uguagliando l'angolo GAE, maggiore del retto CAE,

II. Quindi ancora si ha, come si possa dal cerchio dividere una porzione capace d'un angolo dato, bastando dal contatto tirare una retta, che faccia con la tangente l'angolo dato, perchè così il segmento segato da quella retta averà in se quell'angolo, che è proposto, dalla parte alterna, e dalla medesima sarà il segmento capace dell'altro angolo, che con quello dato compisce due retti.

III. E se sopra la data retta AD si dovrà fare un segmento circolare, capace d'un angolo dato, facendo il dato angolo DAF, e sopra la AF eretta la perpendicolare AB, ed indi all'angolo rimanente DAB fatto sopra la AD l'angolo uguale ADC, convenendo la retta DC

con

con AB in C, descritto dal centro C con l' intervallo CA, il circolo ADB, sarà il segmento ABD sopra la retta data AD eretto, capace del dato angolo DAF.

IV. Volendo nel cerchio ABG descrivere un triangolo, che abbia ciascuno de' suoi angoli uguale a ciascuno degli angoli d' un triangolo dato MLN, tirata la tangente EAF, e fatto l' angolo BAF uguale ad MLN, e l'angolo GAE uguale all' altro LNM, segandosi il cerchio da queste rette in B, e G, congiunta GB, sarà il triangolo AGB equiangolo al dato MLN, perchè l'angolo AGB sarà uguale a BAF, cioè ad MLN, e l' angolo ABG uguale all'altro GAE, cioè ad LNM; e però il rimanente GAB sarà uguale al residuo LMN. FIG. 74.

PROPOSIZIONE XVI.

In un dato cerchio descrivere un quadrilatero ABED, *rettangolo, ed equilatero, il quale si nomina* Quadrato. FIG. 75.

Condotti per lo centro C due diametri AE, BD, che seghinsi in C perpendicolarmente, cioè ad angoli retti; congiunte quindi le rette AB, BE, ED, DA, sarà fatto il quadrato, che è un parallelogrammo, rettangolo, ed equilatero; imperocchè ne' triangoli ACB, BCE, ECD, DCA essendo uguali tutti gli angoli retti in C, ed uguali tutti i lati de' raggi CA, CB, CE, CD, ancora tutte le loro basi AB, BE, ED, DA saranno uguali; dunque è equilatero; e perchè tutti gli angoli ABE, BED, EDA, DAB sono ne'

semi-

femicircoli, tutti fono retti; dunque le linee oppofte fono parallele, e tutto effo parallelogrammo equilatero è ancora rettangolo; e però dicefi quadrato.

COROLLARJ.

FIG. 76. I. Se fi voleffe fopra a una data linea *AB* fare il quadrato, gli fi alzi dal termine *A* la perpendicolare *AD* uguale alla *AB*, e tirata la *DE* parallela ad *AB*, e la *BE* parallela ad *AD*, farà fatto il quadrato *ABED*; perchè effendo *ABED* un parallelogrammo, in cui i lati oppofti fono uguali, *AB* a *DE*, e *BE* ad *AD*, ficcome *AB*, ed *AD* fono uguali, ancora ciafcuno degli altri due farà uguale alla *AB*; ed effendo gli angoli interni tra le parallele uguali a due retti, ficcome fi è fatto retto *BAD*, farà pure retto *ABE*, e *BED*, ed *ADE*; dunque è quefto quadrilatero di lati uguali, e di ciafcun angolo retto, e però è il Quadrato.

FIG. 77. II. Quindi è chiaro, che in ogni parallelogrammmo, fe un angolo è retto, ciafcun altro di effo deve effer retto.

III. Al dato cerchio *ABED* volendo circofcrivere un quadrato, condotti per lo centro *C* li diametri *AE*, *BD* perpendicolarmente, cioè ad angoli retti, fi tirino per li punti *A*, *B*, *E*, *D* le tangenti *GAF*, *FBI*, *IEH*, *HDG*, che faranno parallele a' diametri oppofti, facendo pure con li femidiametri angolo retto. Sarà effo *GFIH* il quadrato circofcritto, effendo qualunque di tali lati uguale al diametro oppofto, onde ficcome fono uguali i diametri, così effi lati

tan-

tangenti, paralleli ad essi, devono essere uguali; e qualunque angolo *AGD* è retto nel parallelogrammo *ACDG* (che pure è un quadrato minore) siccome gli altri angoli *ACD*, *CDG*, *CAG* sono retti; dunque *GFIH* è rettangolo, ed equilatero, onde è il quadrato circoscritto al cerchio.

IV. E' manifesto, che il quadrato circoscritto al cerchio è doppio dell' altro inscritto *ABED*, perchè ogni quadrato del raggio è doppio del suo triangolo, cioè *ACDG* doppio di *AÇD*, ed *ACBF*, doppio di *ACB*; e *BIEC* doppio di *BCE*; ed *EHDC* duplo di *ECD*; dunque li quattro quadrati de' raggi compiendo il quadrato *GFIH* circoscritto al cerchio, e li 4 triangoli suddetti compiendo il quadrato inscritto *ABED*, bisogna che quello sia duplo di questo.

V. Si può ancora inscrivere nel cerchio un parallelogrammo rettangolo, ma non equilatero, come tirati due diametri per lo centro *C*, non perpendicolarmente, ma inclinati l'uno all' altro *AL*, *NH*, e congiunte le rette *AN*, *HL*, che saranno uguali essendo basi de' triangoli *ACN*, *HCL* composti intorno ad angolo uguale con raggi uguali, e tirate pure le altre due *AH*, *NL*, che pure sono uguali basi de' triangoli *ACH*, *NCL*, composti con uguale angolo di raggi uguali; si averanno le parallele *AN*, *HL*, ed *NL*, *AH*; e si congiungono ad angoli retti *AHL*, *HAN*, *ANL*, *NLH*, essendo fatti ne' semicircoli, onde ne risulta il parallelogrammo *AHLN*, ch' è rettangolo, ma non quadrato, perchè i lati *HL*, *AN*, opposti all' angolo ottuso, sono maggiori degli

FIG. 78.

altri

altri due *AH*, *NL* opposti all' angolo acuto. Ma simile rettangolo non equilatero, cioè non quadrato, non può essere circoscritto al cerchio, non potendo tirarsi al cerchio dal medesimo punto le tangenti disuguali (a).

(b) Corol. 5. Prop. 6.

VI. Viceversa può circoscriversi al cerchio un parallelogrammo non rettangolo *BDEF*, tirate le tangenti da i termini de' due diametri *AL*, *HN*, inclinati l'uno sopra l'altro, perchè saranno parallele *BD* ad *EF*, facendo angoli retti col diametro *AL*, e *BF*, ed *ED*, che fanno angoli retti col diametro *NH*; ma non sono essi lati congiunti ad angoli retti, essendo l'angolo *ABH*, e l'opposto *NEL* angoli ottusi, perchè nel quadrilatero *ACHB*, e nell'altro *NCLE* sono gli angoli in *C* acuti, che con l'opposto fanno due retti, come sono retti gli altri due *CAB*, *CHB*, ed altresì *CNE*, e *CLE* fatti da' raggi colle tangenti; e parimente gli angoli *ADN*, ed *HFL* sono acuti, come gli opposti *ACN*, *HCL* sono ottusi; dunque tale parallelogrammo *BDEF* circoscritto al cerchio non è rettangolo; ma dentro al cerchio non potrebbe iscriversi un simile parallelogrammo, perchè essendo retti gli angoli fatti nel semicircolo sopra i diametri, non possono essere che rettangoli i parallelogrammi inscritti.

FIG. 79.

PROPOSIZIONE XVII.

FIG. 80.

Data qualunque figura rettilinea MNOPQ, *circoscrivere ad un dato cerchio una figura di altrettanti lati, equiangola ad essa.*

Si

SI prolunghi ciascun lato della data figura al di fuori, NM in R, ON in S &c. Tutti questi angoli esterni essendo uguali a quattro retti (a), si potranno descrivere intorno al centro C del cerchio; ivi dunque condotto qualunque raggio CB, si faccia l'angolo BCF uguale a QMR, poi l'angolo BCD uguale ad MNS, indi l'angolo DCE uguale ad NOT, poi ECA uguale ad OPV, ed il rimanente ACF sarà uguale all'ultimo residuo PQX; indi da' termini di questi raggi condotte le tangenti, con cui faranno angoli retti, ne risulterà la figura $HIKLG$ circoscritta al cerchio, la quale sarà equiangola alla figura data $MNOPQ$ con altrettanti lati; imperocchè in qualunque quadrilatero $FCBH$ essendo gli angoli in F, e B retti, gli altri due opposti BCF, FHB saranno uguali a due retti, e però uguali alli due QMR, QMN; ed è BCF uguale a QMR, dunque l'altro FHB deve essere uguale a QMN. Similmente si proverà essere l'angolo BID uguale ad MNO, e l'altro DKE uguale ad NOP; e così gli altri si mostreranno uguali; dunque si è circoscritta al cerchio la figura equiangola alla data. Il che &c.

(a) Corol. 8. Prop. 9.

COROLLARJ.

I. Se il dato Poligono avesse tutti gli angoli uguali M, N, O, P, Q al di dentro, averebbe pure al di fuori uguali gli esterni; e però sarebbero uguali gli angoli fatti al centro C del cerchio; onde gli archi corrispondenti FB, BD, DE &c. sarebbero uguali, e le tangenti FH, HB del primo uguaglierebbero le tangenti BI, ID

del ſecondo, e così le altre; dunque i lati ancora *HI*, *IK*, *KL*, *LG*, *GH* riuſcirebbero uguali; e però il poligono circoſcritto ſarebbe equiangolo, ed equilatero.

II. Congiunte poi le rette *FB*, *BD*, *DE*, *EA*, *AF* riuſcirà un poligono pure equilatero, ed equiangolo inſcritto nel cerchio, ſe tale è il circoſcritto; ma ſe il circoſcritto non ha gli angoli uguali, non eſſendo eſſo equilatero, l' inſcritto non averà ne meno gli angoli uguali alli corriſpondenti del circoſcritto, o del dato *MNOPQ*. Imperocchè, condotte le rette *CH*, *CG*, *CL* &c. queſte dividono per mezzo gli angoli della figura circoſcritta, mentre le due tangenti dal medeſimo punto, come *GA*, *GF*, ſono uguali, il raggio *CA* uguale a *CF*, e la *CG* comune ad ambidue i triangoli *CAG*, *CFG*, e però l' angolo ancora *CGA* è uguale a *CGF*; e ſimilmente *CLA* uguale a *CLE* &c. dunque ſe l' angolo *AGF* non è uguale all' angolo *ALE*, non ſarà la metà del primo uguale alla metà del ſecondo; e però la metà dell' uno con quella dell' altro non fa un angolo uguale a veruno di eſſi; ma l' angolo *FAE* uguaglia le due meta di detti angoli *CGF*, *CLE*, perchè nel quadrilatero *CFGA* eſſendo li due angoli oppoſti uguali a due retti, come *CFG*, *CAG*, potrebbe paſſare un cerchio intorno a quei quattro punti *C*, *F*, *G*, *A* (a), e però l' angolo *CGF* ſarà uguale a *CGA*. E ſimilmente circoſcritto un cerchio intorno al quadrilatero *ACEL*, l' angolo *CAL* deve eſſere parimente uguale a *CLE*; dunque eſſo angolo *FAE* non può eſſere uguale, ne ad *AGF*, ne ad *ALE*, eſſendo

(a) Corol. 4. Prop. 14.

essendo compreso dalla metà dell' uno, e dalla metà dell' altro.

III. Volendo inscrivere un cerchio dentro qualsivoglia triangolo *EHF*, divisi per mezzo due de' suoi angoli *FEH*, *FHE* con le rette *EC*, *HC* convenienti in *C*, e condotte dal punto *C* sopra i lati le perpendicolari *CA*, *CD*, *CB*, saranno esse tra di loro uguali, perchè il triangolo *CEB* rivoltandosi sopra il conseguente *CEA*, per essere l' angolo *BEC* uguale ad *AEC*, si uniranno insieme le rette *EB*, *EA*, e non potendo il retto angolo *CBE* adattarsi sopra la retta *EH* fuori del retto angolo *CAE*, converranno insieme; onde la *CB* sarà uguale alla *CA*; e similmente ancora *CD* si proverà uguale alla *CA*, poichè essendo l' angolo *CHD* uguale a *CHA*, rivoltandosi *HDC* sopra il triangolo *HAC*, parimente converranno *HD* con *HA*, e *CD* con la stessa *CA*, non potendo l' angolo retto cadere altrove; dunque le tre perpendicolari essendo uguali, col centro *C*, e col raggio *CB* descritto un cerchio, passerà per li punti *B*, *A*, *D*, e sarà toccato da' lati *EF*, *EH*, *HF* perpendicolari a' suoi raggi; onde sarà inscritto esso cerchio nel triangolo dato. FIG. 81.

PROPOSIZIONE XVIII.

Se sopra i lati AB, BC *del triangolo* ABC *si faranno due qualsivoglia parallelogrammi* ABHG, *e* BCEF, *li cui lati opposti a' lati* AB, BC *del triangolo, convengano in* I, *condotta pel vertice* B *del triangolo la retta* IBD, *a cui da' termini* A, C *si conducano parallele* AK, CM, *con-* FIG. 82.

correnti con esse GH, EF, *in* K, M, *congiunta* KM, *sarà* ACMK *un parallelogrammo sopra la base uguale alli due parallelogrammi* ABHG, BCEF, *fatti sopra i lati del dato triangolo.*

IMperocchè, essendo tanto *AK*, che *CM* parallele, ed uguali a *BI*, per essere tanto *BAKI*, che *BIMC* parallelogrammi, deve riuscire *KM* parallela alla *AC*, dunque *ACMK* è un parallelogrammo, di cui la parte *DCML* è uguale a *CMIB*, il quale pure è uguale a *CBFE*, essendo li due primi sopra la stessa base *CM*, e tra le medesime parallele *CM*, *DI*, e questi altri due secondi sopra la medesima base *CB*, e tra le stesse parallele *CB*, *EI*; ed ancora il rimanente *ADLK* è uguale ad *AKIB*, avendo la stessa base *AK* tra le parallele *AK*, *DI*, ed altresì *AKIB* è uguale ad *ABHG*, essendo sulla medesima base *AB*, e tra le stesse parallele *AB*, *GI*; dunque *DCML*, ed *ADLK*, cioè tutto il parallelogrammo *ACMK* è uguale alli due parallelogrammi *CBFE*, ed *ABHG*. Il che &c.

COROLLARJ.

FIG. 83. I. Nel Triangolo rettangolo *ABC* descritti li quadrati de' lati *AB*, *CB*, che sono *ABHG*, e *CBFE*, sono questi uguali al quadrato della base *AC*; imperocchè il parallelogrammo *ACMK* descritto, come in questa proposizione, che è uguale a que' due parallelogrammi quadrati, si prova essere appunto il quadrato della Ipotenusa *AC*; perchè essendo *FB* uguale a *BC*, ed *FI* uguale alla parallela *BH*, la quale è uguale a *BA*;

ed

ed essendo l' angolo *BFI* retto uguale al retto *CBA*, ne segue, che ancora *BI* base del triangolo *FBI* è uguale ad *AC* base di *ABC*; ed è *BI* uguale alla parallela *CM*, dunque *AC*, e *CM* sono uguali; ed ancora essendo l' angolo *FBI* uguale all' angolo *BCA*, e l' angolo *IBH* uguale à *BCM*, cioè l' esterno all' interno opposto nelle parallele; dunque l' angolo *FBH*, che è uguale al retto *ABC*, è uguale all' angolo *ACM*, il quale però sarà retto; e così pure saranno retti gli altri *CAK*, *CMK*, *AKM*; dunque tale parallelogrammo *ACMK* è equilatero, e rettangolo; e però il quadrato della base *AC* è uguale alli due quadrati de' lati *AB*, *CB*. Il che &c.

II. La retta *IBD* è perpendicolare alla base *AC*, essendo parallela ad *MC*, e ad *AK*, che fanno angolo retto colla medesima base; onde il quadrato *BCEF* del lato *BC* è uguale al rettangolo *CDLM*, e l' altro quadrato *ABHG* del lato *AB* è uguale al rettangolo *ADLK*, essendo *BCEF* uguale a *BCMI*, e questo a *CDLM*, come si è mostrato di sopra; onde essendo *CM* uguale a *CA*, il rettangolo di *AC* in *CD* uguaglia il quadrato del lato *CB*, ed il rettangolo della stessa *AC* in *AD* (le quali parti *CD*, *AD*, sono divise dalla perpendicolare *BD* condotta sulla base dal vertice del triangolo rettangolo) uguaglia l' altro quadrato del lato *AB*; ed essendo questi due quadrati, e questi due rettangoli uguali al quadrato di *AC*, se ne deduce, che il quadrato d' una linea *AC* divisa in *D* è uguale a' rettangoli di *AC* in *AD*, e di *AC*, in *DC*.

FIG. 84. III. Viceversa, se in un triangolo ABC i quadrati de' due lati AB, e BC sono uguali al quadrato della base AC, bisogna che l' angolo ABC sia retto; imperocchè facendo dall' altra parte l' angolo retto ABD, e presa BD uguale a BC, congiunta AD, sarà il quadrato AD uguale a' quadrati AB, BD, ma questi sono gli stessi che AB, BC, dunque il quadrato AD è uguale al quadrato AC; e però essendo uguale ancora AD ad AC, e gli triangoli ABC, ABD avendo ciascun lato uguale al suo corrispondente, sarà l' angolo pure ABC uguale all' angolo retto ABD.

FIG. 85. IV. Dati più quadrati delle linee A, B, C, D, si potrà trovarne uno uguale a tutti; poichè posta EF uguale ad A, e ad angolo retto postavi FG uguale a B, congiunta EG, averà questa il suo quadrato uguale alli due EF, FG, che sono gli stessi quadrati di A, e B; e posta ad angolo retto sopra la EG la retta GH uguale a C, e congiunta EH, sarà il suo quadrato uguale à' quadrati EG, GH, cioè a quelli di A, di B, e di C; e similmente posta IH uguale a D sopra la EH ad angolo retto, congiunta la EI, sarà il suo quadrato uguale a' quadrati di EH, e di HI, cioè a tutti li quadrati di A, di B, di C, e di D; e così se altri ve ne fossero, si troverebbe il quadrato uguale alla somma di tutti.

FIG. 86. V. Dal quadrato di AB volendo levare il quadrato AD, e trovare il quadrato uguale all' eccesso di quello sopra questo, si descriva il semicircolo ADB sopra il diametro AB, ed in esso adattata la retta AD, si congiunga BD; il qua-

quadrato di questa sarà l'eccesso del quadrato *AB* sopra il quadrato *AD*, essendo l'angolo *ADB* retto, e però esso quadrato *AB* uguale ad ambidue i quadrati *AD*, e *BD*.

PROPOSIZIONE XIX.

Se la retta AB *è divisa in* E, *il quadrato di* AB, *che sia* ABCD, *sarà uguale a' quadrati delle parti* AE, EB, *con due rettangoli fatti da una parte nell' altra.*

TAV. VI. FIG. 87.

SI conduca il diametro *AC*, e dal punto *E* tirata la *EG* parallela a *BC*, segante *AC* in *I*, per il punto *I* si tiri la *FIH* parallela ad *AB*. Sarà *AEIF* il quadrato di *AE*, ed *IHCG* il quadrato di *IH*, cioè dell' altra parte *EB*; imperocchè, essendo *AB* uguale a *BC*, l' angolo *BAC* è uguale a *BCA*, ma a questi pure sono uguali gli angoli *CIH*, *AIE*, essendo gli esterni uguali agl' interni opposti nelle parallele; dunque ancora *IE* è uguale ad *AE*, e *CH* uguale ad *HI*; ed essendo *AEI*, *IHC* angoli retti uguali ad *ABC*, dunque li parallelogrammi *AEIF*, *IHCG* sono equilateri rettangoli, e però tutt' uno con i quadrati di *AE*, e di *EB* uguale ad *IH*; ma li rettangoli *BEIH*, *IFDG* sono pure uguali (a), e composti dalle parti *AE*, *EB*; dunque il quadrato di *AB*, cioè *ABCD*, è uguale a quadrati delle parti *AE*, *EB*, ed a' due rettangoli di una parte nell' altra, pareggiando li due quadrati *AEIF*, *HCGI*, con li due rettangoli *BEIH*, *IFDG* Il che &c.

(a) Prop. 13

COROLLARJ.

FIG. 88. I. Per qualunque punto I preso nel diametro del quadrato, condotte le parallele a i lati, ne riesce pure un quadrato, essendosi mostrato, essere $AEIF$ il quadrato di AE, ed $IHCG$ il quadrato di IH; ed ancora presi nel diametro due punti I, O, e condotte le parallele a i lati, riuscirà $INQM$ un quadrato di IN &c.

II. La differenza di due quadrati AB, ed AE uguaglia il rettangolo della somma de' lati nella loro differenza; perchè prolungata GIE in EL uguale ad IE, e compiuto il rettangolo $CGLK$, sarà $LEBK$ uguale ad $IEBH$, cioè ancora ad $FIGD$, ed è $FIGD$ con $GEBC$ la differenza del quadrato $ABCD$ dall' altro $AEIF$; dunque ancora $LEBK$ con $GEBC$, cioè $CGLK$ rettangolo fatto dalla GL uguale alla somma di AB, ed AE (essendo GE uguale a CB, e però ad AB, ed essendo EL uguale ad EI, e però ad AE) nella LK uguale alla differenza di AB, ed AE, (essendo LK uguale ad EB, che è AB meno AE) sarà uguale alla differenza del quadrato AB dal quadrato AE.

FIG. 89. III. Segata la retta AB per mezzo in C, e preso in essa un altro punto D, il rettangolo ADB col quadrato CD sarà uguale al quadrato CB; imperocchè essendo AC uguale a CB, la retta AD è la somma di CB, e CD, e la retta DB è la differenza delle stesse; dunque il rettangolo ADB è l' eccesso del quadrato CB sopra il quadrato CD, e però aggiunto all' uno, ed all' altro il quadrato CD, sarà il rettangolo

ADB

ADB col quadrato *CD* uguale al quadrato *CB*, che contiene esso quadrato *CD* col detto eccesso.

IV. Ma se fosse preso il punto *D* nella retta *AB*, prolungata, e divisa per mezzo *AB* in *C*, sarà il rettangolo *ADB* col quadrato *CB* uguale al quadrato *CD*; imperocchè *AD* è la somma di *CD*, e di *CB*, e la *BD* è la loro differenza; dunque il rettangolo *ADB* uguaglia l'eccesso del quadrato *CD* sopra il quadrato *CB*; onde all'uno, ed all'altro aggiunto il quadrato *CB*, sarà il rettangolo *ADB* col quadrato *CB* uguale al quadrato *CD*. FIG. 90.

V. Nel triangolo Isoscele *AEB* condotta dal vertice *E* sopra la base *AB* la retta *ED*, se viene al di dentro, sarà il rettangolo *ADB* col quadrato *ED* uguale al quadrato *EB*; ma se passa per di fuori, il rettangolo *ADB* col quadrato *EB* sarà uguale al quadrato *ED*; imperocchè tirata la perpendicolare *EC* sopra la base *AB*, che la divide pel mezzo, nel primo caso il rettangolo *ADB* col quadrato *DC* uguaglia il quadrato *CB*, ed aggiunto di quà, e di là il quadrato *EC*, sarà il rettangolo *ADB* col quadrato *DC*, e col quadrato *EC* (cioè *ADB*, col quadrato *ED*, che uguaglia i due quadrati *DC*, ed *EC*) uguale al quadrato *CB* col quadrato *CE*, cioè al quadrato *EB* uguale ad essi; e similmente nel secondo caso, essendo il rettangolo *ADB* col quadrato *BC* uguale al quadrato *CD*, aggiunto il quadrato della perpendicolare *EC*, sarà *ADB* col quadrato *EB* (uguale alli due *BC*, ed *EC*) uguale a' quadrati *CD*, ed *EC*, cioè al quadrato *ED*. FIG. 91.

VI.

FIG. 92. VI. Due rette *AB*, *GF*, che si segano in *D* dentro a un cerchio, averanno uguali i rettangoli delle loro parti *ADB*, *FDG*; imperocchè congiunti i raggi *CA*, *CB*, e *CF*, *CG*, e tirata dal centro la retta *CD*, ne' triangoli Isosceli *ACB*, ed *FCG* tanto il rettangolo *ADB* col quadrato *CD* uguaglia il quadrato del raggio *CB*, quanto il rettangolo *FDG* col quadrato *CD* uguaglia il quadrato dell' altro raggio *CG*; ma tali quadrati de' raggi sono uguali, dunque ancora i rettangoli *ADB*, *FDG* sono uguali, mentre con lo stesso quadrato *CD* si uguagliano al quadrato del raggio; e se pure due rette *AD*, *FD* convengono fuori del cerchio in *D*, saranno parimente uguali i rettangoli *ADG*, *FDB*; perchè congiunta la *CD*, tanto sarà *ADG* col quadrato del raggio *CG* uguale al quadrato *CD*, quanto ancora il rettangolo *FDB* col quadrato del raggio *CB* sarà uguale allo stesso quadrato *CD*.

VII. Se dallo stesso punto *D* fuori del cerchio è condotta la tangente *DH*, e qualunque segante *DA*, sarà il quadrato della tangente uguale al rettangolo della segante *AD*, e della esterna parte *DG*; perchè congiunto il raggio *CH*, sarà il quadrato *CD* uguale al quadrato *DH* col quadrato del raggio *CH*; ma era ancora dimostrato uguale il quadrato *CD* al rettangolo *ADG* col quadrato del raggio *CG*; dunque esso quadrato della tangente *DH* è uguale al rettangolo *ADG*, o a quello di qualunque altra segante *FDB*.

VIII. Vicendevolmente, se due rette *AB*, *FG* si segano in *D*, in maniera, che il rettangolo *ADB* uguagli il rettangolo *FDG*, dovrà passare

un

un cerchio per li quattro punti A, G, B, F; ed ancora se due rette AD, FD siano segate in G. e B in maniera, che li rettangoli ADG, FDB siano uguali, parimente passerà il cerchio per detti punti; perchè se passasse per tre soli di essi, e non pel quarto, ma segasse una di tali linee in un altro punto, sarebbe il rettangolo primo uguale ad un altro maggiore, o minore del secondo; come se passasse per li punti A, G, F, E, e non per B, sarebbe FDG uguale ad ADE, ed ADG uguale ad FDE, onde sarebbe ADB uguale ad ADE, ed FDB uguale ad FDE. Il che è assurdo.

IX. Nel semicerchio AEB qualunque rettangolo BDA de' segmenti del diametro AB diviso in D, sarà uguale al quadrato della perpendicolare DE; perchè congiunto il raggio CE, essendo li due quadrati ED, CD uguali al quadrato CE, o al quadrato CA, o al rettangolo BDA col quadrato CD, tolto esso quadrato CD, resta il quadrato ED uguale al rettangolo BDA. FIG. 93.

X. Onde a qualsivoglia figura rettilinea H può trovarsi il quadrato uguale, potendo farsi un parallelogrammo rettangolo uguale ad essa (a), il quale sia $GBDF$, e prolungato il lato BD in A, posto DA uguale a DF, sopra il diametro BA fatto un semicircolo, ed eretta la perpendicolare DE, sarà il quadrato DE uguale al rettangolo BDA, che è lo stesso di $BDFG$, e però uguale al dato rettilineo H.

(a) Cord. 2. Prop. 13.

XI. Nel medesimo semicircolo AEB congiunte le corde AE, BE, il quadrato AE sarà uguale al rettangolo BAD, ed il quadrato BE ugua-

le al rettangolo ABD, essendo l' angolo AEB retto, e però li due quadrati AE, BE uguali al quadrato del diametro AB.

FIG. 94. XII. Può dividersi la retta AB in C, in maniera, che il rettangolo ABC sia uguale al quadrato della parte rimanente AC; perchè descritto il quadrato $ABID$, e divisa per mezzo AD in E, e congiunta la BE, si prolunghi EA in F, posta EF uguale ad EB, indi descrivasi il quadrato di FA, cioè $AFGC$, sarà la AB segata in C nella detta ragione; perchè prolungata GC in H, essendo il rettangolo DFA col quadrato EA, uguale al quadrato EF, cioè al quadrato EB, che è lo stesso co' quadrati di AE, e di AB; dunque tolto il quadrato AE, rimane il rettangolo DFA, cioè $DFGH$, uguale al quadrato $ABID$, e tolto il rettangolo $ACHD$, sarà il quadrato $ACGF$ uguale al rettangolo $IBCH$, che è lo stesso del rettangolo ABC uguale al quadrato AC.

PROPOSIZIONE XX.

FIG. 95. *La retta* AB *divisa per mezzo in* C, *ed altrove in* D *fuori*, *o in* d *al di dentro*, *saranno li quadrati* AD, e DB *il doppio del quadrato* CD, *e del quadrato* AC; *ed altresì li due quadrati* Ad, e dB *sono il doppio del quadrato* Cd, *e del quadrato* AC.

IMperocchè alzata dal punto C la CE uguale a CB, ed alla AB perpendicolare, congiunte le rette AE, BE, e dal punto D sopra la EB condotta DF (o dal punto d la df) parallela ad

ad EC, e tirata FG(ovvero fg) parallela a CB, e congiunta la retta AF (ovvero Af), sarà il quadrato EF doppio del quadrato FG (ed Ef doppio del quadrato fg) cioè del quadrato CD (ovvero Cd) essendo nel triangolo rettangolo ECB i lati CE, CB uguali, onde l'angolo CEB è semiretto; ed essendo retto EGF (o Egf), come è retto ECB, sarà pure semiretto GFE (o gfE), onde il lato GF è uguale ad EG (ed Eg a gf), però il quadrato EF è doppio di GF, cioè dell'uguale parallela CD (ed il quadrato Ef doppio di gf, cioè dell' uguale Cd). Parimente il quadrato AE è doppio del quadrato AC, essendo AC uguale a CE; dunque li due quadrati EF, AE sono il doppio de' quadrati CD, ed AC (e li quadrati Ef, AE il doppio de' quadrati Cd, ed AC) i quali sono uguali al quadrato AF (ovvero Af) ma questo pure è uguale al quadrato AD, ed al quadrato DF uguale a DB (o al quadrato Ad, ed al quadrato df, uguale a dB) dunque il quadrato AD, col quadrato DB uguaglia il doppio de' quadrati AC, e CD (ed il quadrato Ad col quadrato dB uguaglia il doppio de' quadrati AC, e Cd) dunque è vero il proposto, il quale può esporsi ancora in questo modo, che il quadrato della somma, e della differenza di due rette AC, e CD (o AC, e Cd) delle quali la somma è AD, la differenza BD (o quella Ad, questa Bd) essendo posto CB uguale ad AC, è uguale al doppio quadrato di esse linee date AC, e CD (o AC, e Cd). Il che &c.

Co-

COROLLARJ.

FIG. 96. I. Se due linee *AB*, *EF* dentro a un cerchio s' interseghino in *D* ad angolo retto, li quadrati de' segmenti *AD*, *BD*, *ED*, *FD* saranno il quadruplo del quadrato del raggio *CA*, e conseguentemente uguali al quadrato del diametro; perchè tirate sopra di esse dal centro le perpendicolari *CH*, *CG*, che le dividono pel mezzo, e saranno parallele ad esse rette *FE*, *AB*; essendo il quadrato *AD* col quadrato *DB* (quello la somma delle parti *AH*, *HD*, e questo la differenza di esse) doppio de' quadrati *AH*, ed *HD*; ed ancora li quadrati *ED*, *DF* il doppio de' quadrati *EG*, *GD*, congiunti i raggi *CA*, *CE*, che hanno i loro quadrati uguali a' quadrati di *AH*, ed *HC* (cioè *GD*) e di *EG*, e *GC* (cioè *HD*), saranno essi quadrati *AD*, *DB*, *ED*, *DF* dupli de' due quadrati *AC*, *CE* (giacchè questi si sono veduti uguali a' quadrati *AH*, *HD*, *EG*, e *GD*) e però quadrupli del quadrato di un raggio, onde uguagliano il quadrato del diametro.

FIG. 97. II. Lo stesso avviene, se esse linee si congiungano in *D* fuori del cerchio ad angolo retto, essendo pure ivi li quadrati *AD*, e *DB* dupli de' quadrati *AH*, ed *HD*, e li quadrati *ED*, *DF* dupli de' quadrati *EG*, *GD*, e però dupli d' ambi i quadrati *AC*, *CE*, onde essi quadrati *AD*, *DB*, *ED*, *DF* quadrupli del quadrato d' un raggio.

FIG. 98. III. Quindi ancora si ha, che condotte le rette *AF*, *BE*, ed *AE*, *BF*, li quadrati delle due pri-

prime ſono uguali a' quadrati delle due ſeconde, ed uguali tanto quelli, che queſti al quadrato del diametro, eſſendo eſſi uguali alli quadrati *AD*, *DB*, *ED*, *DF*, preſi inſieme.

PROPOSIZIONE XXI.

FIG. 99.

Il quadrato della ſomma delle due rette DC, *e* CA *è uguale a quattro rettangoli* DCA, *col quadrato della differenza di eſſe linee, cioè di* BD, *poſta* CB *uguale a* CA.

IMperocchè fatto il quadrato *ADNQ* della ſomma *DA* e tiratovi il diametro *AN*, e condotte le *CP*, *BO* parallele a' lati, che ſegheranno il diametro in *F*, *I*, d' onde ſi tirino parallele agli altri lati *EFGH*, *KMIL*, è chiaro, che eſſendo *AC* uguale a *CB*, ed eſſendo quadrati *ACFE*, *GFMI*, *ABIK*, *LION*, sarà il rettangolo *DCFH* lo ſteſſo che *DCA*, uguale a *QEFP*, ed a *PFGO*, ed a *LHFM*, che ſarebbe lo ſteſſo con *HLIG*, ed *ACFE* (che è uguale al quadrato *GFMI*, eſſendo *AC* uguale a *GF*) dunque tutto lo ſpazio *ADLIOQ* è uguale a quattro rettangoli *DCA*, che ſono *DCFH*, *QEFP*, *PFGO*, ed *HLIG* con *ACFE*; però aggiuntovi *LION*, che è il quadrato di *ON*, cioè di *BD*, differenza di *DC*, e *CA*, ne ſegue che il quadrato della ſomma *DC*, e *CB*, cioè di *CA*, che è *ADNQ*, è uguale a quattro rettangoli d' ambidue le rette *DC*, e *CA*, col quadrato della loro differenza *BD*. Il che &c.

Co-

COROLLARJ.

I. Quindi il quadrato della differenza BD è uguale al quadrato della somma DA, toltine quattro rettangoli della retta DC nell' altra CA.

II. Onde presi due numeri, per esempio 7, e 2 la cui somma è 9. e la differenza è 5. sarà il quadrato di 9 uguale a' 4 prodotti di 7 in 2 col quadrato di 5, cioè sarà 81 uguale a 4 via 14, che sono 56, con 25.

III. E viceversa il quadrato della differenza de' medesimi numeri, cioè di 5, che è 25, è uguale al quadrato della somma di 7, e 2, cioè di 9, che è 81, detratto il quadruplo di 7 via 2, cioè detratti 56.

PROPOSIZIONE XXII.

FIG. 100. *Da' termini* D, C *del triangolo* ADC *condotte a' lati opposti le perpendicolari* DE, CB, *se gli angoli* D, *e* C *sono acuti, il quadrato della base* DC *sarà uguale a' rettangoli* ADB, ACE; *ma se uno degli angoli, per esempio* C, *è ottuso, il quadrato* DC *sarà uguale all' eccesso del rettangolo* ADB *sopra l' altro* ACE.

FIG. 101. CONvengano esse perpendicolari DE, CB in G, congiunta la AG, conveniente con la base DC in F, ancora questa gli sarà perpendicolare; imperocchè essendo retti gli angoli DBC, DEC, dovrà passare un cerchio per gli quattro punti D, B, C, E; ed essendo ancora retti gli angoli ABG, AEG, passerà un cerchio per gli quattro punti A, B, E, G (a); dunque congiunta BE, l' angolo

(a) Corol. 1. e 4. della Prop 14.

AEB

AEB farà uguale a *BDC*, fecondo il cerchio, che foffe condotto per li punti *D*, *B*, *C*, *E*; ed ancora l' angolo *AEB* farà uguale ad *AGB* pel circolo, che paffa per li punti *A*, *B*, *E*, *G*; dunque *AGB* farà pure uguale all' angolo *BDC*, o *BDF*; onde nella prima figura li due angoli *BDF*, *BGF* fono uguali a due retti, effendo uguali ad *AGB*, e *BGF*; e nella feconda figura effendo uguali *BDF*, *BGF*, dovrà paffare un cerchio per li quattro punti *B*, *D*, *G*, *F*; onde effendo *DBG* angolo retto, ancora l' oppofto *DFG* nella prima figura farà retto, ed ancora nella feconda, effendo nel medefimo femicircolo tanto *DBG*, che *DFG*; ficchè la *AG* riefce in *F* perpendicolare alla bafe; onde ancora faranno retti gli angoli *ABC*, ed *AFC*, onde pafferà un cerchio per li quattro punti *A*, *B*, *F*, *C*, ed ancora per li quattro *A*, *D*, *F*, *E*; dunque il rettangolo *ADB* farà uguale ad *FDC*, ed il rettangolo *ACE* farà uguale a *DCF*; ma nella prima figura li due rettangoli *FDC*, e *DCF* fono uguali al quadrato *DC*; dunque ivi il quadrato *DC* è uguale alli due rettangoli *ADB*, ed *ACE*: Nella feconda figura poi effendo il quadrato *DC* uguale ad *FDC*, manco *DCF*, farà effo quadrato uguale al rettangolo *ADB*, detrattone l' altro *ACE*. Il che dovea dimoftrarfi.

COROLLARJ.

FIG. 102.

I. Ancora in queft' altra figura effendo l' angolo ottufo *DAC* oppofto alla bafe *DC*, le perpendicolari *DE*, *CB* cadono fopra i lati prolungati al di fuori, e convengono in *G* al di fopra

E

dra del vertice *A*, e congiunta la *AG* parimente concorre con la base *DC* in *F* ad angoli retti; perchè congiunta *EB*, passando un cerchio per li punti *A*, *E*, *G B*, e per li punti *D*, *E*, *B*, *C*, l' angolo *CBE* è uguale ad *EDC*, o diciamo *EDF*, ed ancora *GAE* è uguale a *GBE*; onde *GAE*, ed *EDF* essendo uguali, *EAF*, ed *EDF* sono uguali a due retti, onde passa un cerchio per li punti *D*, *E*, *A*, *F*, sicchè essendo retto *AED*, ancora *AFD* è retto; ed il quadrato della base *DC* sarà pure uguale a' rettangoli *ADB*, ed *ACE*, essendo *ADB* uguale a *CDF*, ad *ACE* nguale a *DFC*; onde essendo il quadrato *DC* uguale agli rettangoli *CDF*, e *DCF*, è pure uguale alli rettangoli *ADB*, ed *ACE*.

II. Anzi essendo ancora in questa figura, e nella prima, e seconda, il rettangolo *CDF* uguale al rettangolo *GDE*, e l' altro *DCF* uguale a *GCB*, sarà pure *ADB* con *ACE* uguale agli altri due *GDE*, *GCB*; ed essendo il quadrato *DC* uguale alla somma de' rettangoli *ADB*, *ACE*, quando gli angoli *D*, *C* sono acuti, ma se un angolo *C* è ottuso essendo il quadrato *DC* uguale all' eccesso di *ADB* sopra *ACE*, sarà ancora nel primo caso il quadrato *DC* uguale alla somma de' rettangoli *GDE*, *GCB*, e nel secondo caso uguale alla loro differenza, cioè all' eccesso di *GDE* sopra *GCB*.

III. E' manifesto poi, che le tre perpendicolari, condotte dagli angoli di qualunque triangolo a' lati opposti, convengono in un medesimo punto *G*; e dove convengono due di esse, congiunto l' altro angolo col punto di detto concorso,

que-

questa linea pure è perpendicolare all' altro lato opposto.

IV. Quando l' angolo *A* è retto, ciascun lato è da se stesso perpendicolare all' altro, convenendo nel punto *A*, ed il quadrato della base *DC* allora è uguale a' quadrati de' lati, che sono i rettangoli *ADA*, *ACA*, essendo tanto il punto *E*, che il punto *B* (ed ancora il punto *G*) nel medesimo punto *A*. FIG. 103.

V. Essendo l' angolo *A* acuto, il quadrato *DC* uguaglia i quadrati de' lati *AD*, *AC*, detratti i due rettangoli *DAB*, *CAE*, ovvero detratto il duplo di uno di essi, perchè l' uno all' altro è uguale, o pure detratto il duplo del rettangolo *FAG*, che uguaglia parimente gli stessi *DAB*, *CAE*; imperocchè li quadrati *AD*, ed *AC* sono uguali, quello a' rettangoli *ADB*, *DAB*, questo a' rettangoli *ACE*, *CAE*; dunque essendo il quadrato *DC* uguale agli rettangoli *ADB*, *ACE*, sarà uguale a' quadrati *AD*, ed *AC*, detratti i rettangoli *DAB*, *CAE*, che sono il doppio di ciascuno di essi, e di *FAG*. FIG. 104.

VI. Ma se l' angolo *DAC* è ottuso, il quadrato *DC* uguaglierà non solo i quadrati *AD*, *AC*, ma di più li rettangoli *DAB*, *CAE*, o dicasi il doppio di ciascuno di essi, essendo uguali, o ancora può dirsi il doppio di *GAF*, che pure è uguale a ciascuno degli altri. Imperocchè essendo esso quadrato uguale a' rettangoli *ADB*, ed *ACE*, il primo de' quali importa il quadrato *AD* col rettangolo *DAB*, ed il secondo è uguale al quadrato *AC* col rettangolo *CAE*, è chiaro, che il quadrato *DC* eccede li quadrati *AD*, *AC* con li detti rettangoli. FIG. 105.

VII.

FIG. 106. VII. Nel triangolo Acuziangolo *ADC* condotte dagli angoli a' lati opposti le perpendicolari *DE*, *CB*, *AF*, che convengono in *G*, li quadrati de' lati *AD*, *DC*, ed *AC* sono uguali al doppio de' rettangoli *EDG*, *BCG*, *FAG*; imperocchè si è dimostrato essere il quadrato *DC* uguale alli rettangoli *EDG*, *BCG*; ed il quadrato *AC* similmente è uguale a' rettangoli *BCG*, *FAG*; ed il quadrato *AD* ugnale a' rettangoli *FAG*, *EDG*; dunque i quadrati di tutti li tre lati uguagliano il doppio di detti rettangoli, che sono ivi due volte nominati.

VIII. Quindi in esso triangolo due quadrati *AD*, ed *AC* uguagliano *BCG*, *EDG*, col doppio del rettangolo *FAG*; onde essi quadrati *AD*, *AC* uguagliano il quadrato *DC* (che è uguale alli due rettangoli *BCG*, *EDG*) col doppio rettangolo *FAG*.

IX. Onde se riesce *AF* divisa in *G* per mezzo, essendo il quadrato *AF* doppio del rettangolo *FAG*, saranno li due quadrati *AD*, *AC* uguali al quadrato *DC* col quadrato della perpendicolare *AF*.

FIG. 107. X. Però se vi sarà un triangolo rettangolo *CAH*, condotta la perpendicolare *AF* sopra la base, e divisa la parte *HF* per mezzo in *D*, congiunta *DA*, sarà fatto il triangolo *DAC* tale, che averà li quadrati de' lati *AC*, *AD* uguali al quadrato della base *DC*, e della perpendicolare *AF*; imperocchè condotta la *DE* perpendicolare al lato *AC* dividerà per mezzo la perpendicolare *AF* in *G*, essendo ancora l' angolo *HAC* retto, e però *DGE* parallela ad *AH*; e sic-

siccome nel triangolo *HAF* la *DG* divide *HF* per mezzo in *D*, così dividerà per mezzo *AF* in *G*.

PROPOSIZIONE XXIII.

In qualunque triangolo ABC *condotta la retta* BD *dal vertice* B *in* D *alla metà della base* AC, *saranno li quadrati de' lati* BA, BC *uguali al doppio del quadrato della retta* BD, *ed al doppio del quadrato della metà della base* AD, *ovvero* DC.

TAV. VII. FIG. 108

SE il triangolo è equicrure, la retta *BD* sarà perpendicolare alla base, onde essendo *AB* quadrato uguale a' quadrati *AD*, *BD*, ed il quadrato *BC* uguale a' quadrati *CD*, *BD*, è manifesto, che li due quadrati *AB*, e *BC* uguagliano il doppio de' quadrati *BD*, ed *AD*.

Ma se non sono que' lati uguali, la *BD* segherà obliquamente la base *AC*, e condottevi le perpendicolari *AF*, *CE*, essendo ne' triangoli *ADF*, *CDE* gli angoli del primo uguali agli angoli del secondo, e la *CE* parallela ad *AF*, ed il lato *AD* uguale al lato *DC*, saranno pure gli altri lati loro uguali, cioè *DF* uguale a *DE*; però il rettangolo *BDE* uguaglierà il rettangolo *BDF*; onde essendo il quadrato *AB* uguale a' quadrati *AD*, *BD* con due rettangoli *BDF*; ed il quadrato *BC* uguale a' quadrati *CD*, e *BD*, detratti due rettangoli *BDE*, quindi sono li due quadrati *AB*, e *CB* solamente uguali a' due quadrati della *BD*, ed a' due quadrati della mezza

 base

base AD, che sono gli ambidue uguali AD, e CD; giacchè li due retti angoli BDE uguagliano gli altri due BDF, onde quelli aggiunti, e questi sottratti, nulla di più, nè di meno importano alli due quadrati AB, e BC, se non il doppio quadrato BD, ed il doppio quadrato AD. Il che era da dimostrarsi.

COROLLARJ.

FIG. 109. I. Quindi in ogni parallelogrammo $ABCE$ li quadrati de' diametri AC, BE uguagliano i quadrati de' lati AB, BC, CE, ed EA; imperocchè essendo AB, BC uguali al doppio de' quadrati BD, ed AD, e li quadrati CE, ed EA uguali al doppio de' quadrati ED, ed AD, essendo ED uguale a BD (perchè li diametri si dividono per mezzo in D, essendo i triangoli ADE, BDC con ciascun angolo dell'uno uguale al corrispondente dell'altro, ed il lato AE uguale a BC, e però gli altri lati uguali, BD a DE, ed AD a DC) saranno li quadrati de' lati AB, BC, CE, EA uguali al quadruplo del quadrato BD (che è il quadrato di BE) con il quadruplo del quadrato AD (che è il quadrato AC) dunque li quadrati de' lati uguagliano quelli de' diametri.

FIG. 110. II. Onde se due parallelogrammi $ABCE$, ed $FGIH$ hanno i medesimi lati, ma con diversi angoli composti, li diametri dell'uno essendo disuguali a' diametri dell' altro, saranno però i quadrati de' diametri di quello uguali a' quadrati de' diametri di questo, essendo uguali tanto gli uni, che gli altri a' quadrati de' lati del suo rettangolo, i quali suppongansi rimasi uguali.

III.

III. Similmente, se li diametri AC, BE d'un parallelogrammo sono uguali a' diametri GH, FI di un altro, benchè variamente inclinati tra di se questi, che quelli; saranno pure li quadrati de' lati del primo uguali a' quadrati de' lati del secondo parallelogrammo, benchè riescano disuguali questi lati a quelli.

FIG. 111

IV. Nel diametro GF d' un cerchio presi due punti A, B (dentro, o fuori del circolo) ugualmente distanti dal centro C, condotte a qualunque punto D della periferìa le rette AD, BD, ed a qualsivoglia altro punto E le rette AE, BE, saranno i quadrati di quelle uguali a' quadrati di queste; imperocchè congiunti i raggi CD, CE, tanto sono li quadrati AD, e DB uguali al doppio de' quadrati AC, DC, quanto li quadrati AE, BE sono parimente uguali al doppio de' quadrati AC, EC; onde sono gli stessi.

FIG. 112.

V. Similmente, se da qualunque punto D, dentro, o fuori del cerchio si conducano a' termini di qualunque diametro GF, ed AB, le rette DG, DF, e DA, DB, li quadrati delle prime saranno uguali a' quadrati delle seconde, perchè condotta al centro la retta DC, tanto li quadrati DG, e DF sono il doppio del quadrato DC, e del quadrato del raggio CG, quanto li quadrati DA, e DB sono pure il doppio del quadrato DC, e del quadrato del raggio CA; il che è il medesimo di quello.

FIG. 113.

VI. In ogni triangolo ABC condotti da qualunque angolo gli assi AE, BD, CF, che segano per mezzo gli opposti lati BC, AC, AB, saranno li quadrati di questi lati agli quadrati de' sud-

detti assi, come 4 a 3; perchè essendo li quadrati *AB*, e *BC* il doppio del quadrato *BD*, e del quadrato *AD*; e li quadrati *AB*, ed *AC* il doppio de' quadrati *AE*, *CE*; e li quadrati *AC*, *BC* il doppio de' quadrati *CF*, *AF*; dunque li due quadrati *AB*, e li due *AC*, e li due *BC* sono uguali al doppio de' quadrati *BD*, *AE*, *CF*, con li due quarti, cioè la metà de' quadrati *AC*, *BC*, *AB*; e però (dividendo l'una, e l'altra parte per mezzo) li soli quadrati *AB*, *AC*, *BC* uguagliano li quadrati *BD*, *AE*, *CF*, con un quarto de' quadrati *AB*, *AC*, *BC*; e tolto di quà, e di là questo quarto, rimangono $\frac{3}{4}$ de' quadrati *AB*, *AC*, *BC* uguali a' quadrati *BD*, *AE*, *CF*; onde 3 quadrati de' lati sono uguali a 4 quadrati degli assi; e però li quadrati *AB*, *AC*, *BC* a' quadrati *BD*, *AE*, *CF*, sono come 4 a 3.

AVVERTIMENTO.

Si proverebbe ancora, essere li quadrati de' lati *AB*, *AC*, *BC* uguali al triplo de' quadrati di *AG*, *BG*, e *CG*, ed al duodecimo de' quadrati *GD*, *GE*, *GF*; ma ciò potrà ricavarsi dopo aver intese le proprietà delle Proporzioni, di cui parleremo nella seguente seconda parte; ed osservando, ne raccoglieranno li bravi Studenti, che li quadrati delle intere *AE*, *BD*, *CF* sono alli quadrati delle loro due terze parti *AG*, *BG*, *CG*, come 9. a 4. ed a' quadrati delle loro terze parti *GE*, *GD*, *GF*, come 9. ad 1. onde paragonando questi quadrati ordinatamente, o perturbatamente co' quadrati de' lati *AB*, *AC*, *BC*, ne seguirà il proposto.

INSTITUZIONI GEOMETRICHE

PARTE SECONDA.

DEFINIZIONI.

I. DIconsi *Omogenee* quelle grandezze; che moltiplicandosi riescono una maggiore dell' altra.

II. *Proporzione* dicesi la scambievole relazione della quantità di una grandezza con quella d' un altra omogenea ad essa, che ancora dicesi *Ragione*.

III. *Proporzionalità* dicesi la similitudine delle proporzioni tra varie quantità; in maniera tale però, che se si attende solamente la differenza tra due grandezze, uguale alla differenza di due altre, dicesi *Proporzionalità aritmetica*; ma se nel medesimo modo una grandezza contiene un altra, o in essa si contiene, come qualche altra grandezza contiene, o è contenuta in un altra, si dice *Proporzionalità Geometrica*;

SCOLIO I.

I. *NElla proporzionalità aritmetica bisogna, che tutti i termini siano omogenei, acciò abbiano una uguale differenza l' uno dall' altro. Per esempio, sono aritmeticamente proporzionali i nu-*

meri

ri 7 *e* 5. 12. *e* 10. *perchè le loro differenze sono* 2: *ed ancora le linee* AB, AC, ed ED, DF *sono aritmeticamente proporzionali, quando la differenza* BC *delle due prime uguagli la differenza* FE *delle seconde*.

FIG. 114.

FIG. 115.

II. *Ma nella proporzionalità geometrica basta, che siano due termini omogenei, ed altri due termini di materia diversa, solamente omogeneì tra loro, non con gli altri due. Per esempio, essendo il triangolo* ABC *al triangolo* BCD, *ed ancora la linea* E *alla linea* F, *come* 3 *a* 5; *diconsi questi termini Geometricamente proporzionali. E lo stesso potrebbero essere due pesi, due velocità, due tempi, due angoli &c. nella stessa proporzione, riferendosi il primo di tali termini al secondo suo omogeneo nella stessa relazione.*

DEFINIZIONI.

IV. Le grandezze, che hanno una simile proporzione, cioè la stessa proporzionalità, o sia aritmetica, o geometrica, diconsi quantità *Proporzionali*.

V. Di esse quantità proporzionali si dicono *Antecedenti* la prima, e la terza (e se più fossero, ancora la quinta, e la settima &c.) e diconsi *Conseguenti* la seconda, e la quarta, (e se altre vi sono, ancora la sesta, e l' ottava &c.) e diconsi ancora *Omologj* tanto i termini antecedenti tra loro, quanto ancora tra loro i Conseguenti.

VI. L'antecedente poscia col suo conseguente, diconsi termini *Analogi* per la proporzione, che tra loro hanno, che pure chiamasi *Analogia*.

VII.

VII. Se due quantità omologe ad un' altra ſono diſuguali, la maggiore preſa per antecedente averà *maggior ragione*, che la minore al medeſimo conſeguente; ma paragonandoſi un ſolo antecedente a due conſeguenti diſuguali, diraſſi maggiore la ragione di eſſo antecedente al minore, che al maggiore.

SCOLIO II.

I. *Siccome è chiaro, che eſſendo li due termini omogenei* A, *e* B *diſuguali, il primo maggiore, il ſecondo minore, rieſce maggiore la proporzione del primo* A *al terzo* C, *che quella del ſecondo* B *al medeſimo* C, *così è chiaro, che avendo* B *ad un altro quarto* D *la ſteſſa proporzione, che* A *a* C, *averà* B *a* D *maggior ragione, che* B *a* C; *ed è* D *minore di* C, *come* B *è minore di* A, *per eſſere proporzionali* A, *e* C, *come* B a D; *dunque lo ſteſſo antecedente ha maggior ragione al minore de' conſeguenti, che al maggiore di eſſi.* FIG. 116.

II. *Quando ſia maggiore la proporzione di* A *a* B, *che di* C a D, convertendo, *cioè pigliati i conſeguenti per antecedenti, e gli antecedenti per conſeguenti, ſarà minore la proporzione di* B *ad* A, *che quella di* D a C; *imperocchè, ſe aveſſe* E *a* B *la ſteſſa proporzione, che* C *a* D, *eſſendo maggiore la ragione di* A *a* B, *che di* E *a* B, *ſarebbe* A *maggiore di* E, *dunque averà maggior ragione* B *ad* E, *che* B *ad A*; *ma* B *ad* E *ſtarà, come* D *a* C, *dunque è maggiore la ragione di* D *a* C, *che di* B, *ad* A. FIG. 117.

DE-

DEFINIZIONI.

VIII. POste quante ſi vogliano quantità omogenee, la proporzione della prima all' ultima diceſi *compoſta* delle proporzioni, che averà la prima alla ſeconda, e la ſeconda alla terza, e così di altre intermedie fino all' ultima.

IX. Ma eſſendo uguali le proporzioni della prima alla ſeconda, della ſeconda alla terza, della terza alla quarta &c. ſi dirà la proporzione della prima alla terza *duplicata* di quella, che è tra la prima, e la ſeconda; e la proporzione della prima alla quarta *triplicata* di quella ſteſſa della prima alla ſeconda; e la proporzione della prima alla quinta ſi direbbe *quadruplicata* della medeſima, che è tra la prima, e la ſeconda, o tra la ſeconda, e la terza; e così in infinito.

X. Una retta diceſi ſegata ſecondo l' *eſtrema, e media ragione*, quando tutta ad una ſua parte ſia come queſta parte alla rimanente: Come per eſempio, eſſendo AB ad AC, come AC a CB, diraſſi diviſa AB ſecondo l' eſtrema, e media proporzione.

Vedi la FIG. 114.

SCOLIO III.

I. T*Ra due termini primo, ed ultimo poſſono interporſi altri omogenei, maggiori, o minori di ciaſcuno di eſſi, e così la proporzione di quelli due diceſi compoſta delle proporzioni intermedie; cioè tra le due linee* A, *e* D *interpoſte le linee* B, C *una maggiore, l'altra minore, ſi dirà la ragione di* A *a* D *compoſta delle proporzioni* A *a* B, *e* B *a* C, *e* C *a* D. *Così pure tra due nu-*

FIG. 118.

numeri 4, 9, *presi altri numeri* 6, *e* 3, *si dice la proporzione di* 4 *a* 9 *composta di queste intermedie di* 4 *a* 6, *di* 6 *a* 3, *e di* 3 *a* 9; *anzi presi quali si voglia altri numeri*, 44, 25, 100, *tanto si direbbe composta la ragione di* 4 *a* 9, *delle ragioni di* 4 *a* 44, *di* 14 *a* 25, *di* 25 *a* 100, *e di* 100. *a* 9; *ed essendo pure altre proporzioni disgiunte, tra varj altri generi, per esempio la proporzione delle linee* A, B *essendo uguale alla proporzione delle superficie* EF, *e la proporzione di* B *a* C *essendo uguale alla ragione degli angoli* GH, *e la proporzione* C, D *uguale a quella de' Solidi* I, K *tanto dirassi, essere la proporzione di* A *a* B *composta delle proporzioni di* E *ad* F, *e di* G *ad* H, *e di* I *a* K, *essendo queste uguali all' altre suddette intermedie*.

II. *Ma essendo uguali le proporzioni tra i termini* A, B, C, D *omogenei, dirassi quella proporzionalità continua composta di ragioni uguali; e però la prima alla terza, cioè* A *a* C *si dirà* proporzione duplicata *della ragione semplice tra* A, *e* B, *ovvero tra* B, *e* C; *e la ragione della prima alla quarta si dirà* proporzione triplicata *di quella, che è semplicemente tra* A, *e* B, *ovvero tra* B, *e* C, *o pure tra* C, *e* D, *per essere la suddetta ragione di* A, *e* C *composta di due proporzioni uguali a quella di* A *a* B, *e quell' altra di* A *a* D *composta di* 3 *simili proporzioni; e così procedendo ad un altro termine proporzionale, sarà la proporzione del primo al quinto quadrupla di qualunque delle intermedie tra loro uguali: Così posti i numeri* 3, 6, 12, 24, 48, *la ragione di* 3 *a* 48. *si dirà quadrupla di quel-* FIG. 119.

la

la, che è tra 'l primo, e 'l secondo, o tra 'l secondo, e 'l terzo &c. per essere composta di quelle quattro ragioni tra loro uguali: E così degli altri.

III. *Siccome una retta può dividersi secondo l' estrema, e media ragione, quando sia tutta ad una parte, come questa stessa alla rimanente, così ancora nelle superficie, ne' corpi, negli angoli, ed in altri termini potrà farsi lo stesso; ma non già in qualche numero potrebbe ciò farsi, perchè quelle parti, in cui dividesi una quantità secondo l' estrema, e media ragione, non possono essere* commensurabili *tra di se, o con l' intera quantità medesima; anzi sono sempre* incommensurabili, *e però non possono essere parti numerose di qualche numero, ma solamente radici incommensurabili, che devono essere, tanto il numero intero alla sua parte maggiore, quanto questa maggiore alla residua minore in ragione della radice di cinque manco uno, a tre, manco la radice di cinque, come preso il numero* 100: *converrebbe prenderne la maggior parte uguale a* $50\sqrt{5}$, *meno* 50; *e la minore uguale a* 150, *manco* $50\sqrt{5}$.

IV. *Generalmente per esprimere con brevissimo calcolo le grandezze proporzionali, si rappresenteranno con linee, tanto le quantità superficiali, quanto i corpi, o gli angoli, o i pesi, o le forze, o i tempi, o le velocità &c. che si vogliano paragonare; ma più semplicemente si esprimeranno con lettere Alfabetiche, o grandi* A, B, C, D &c. *o piccole* a, b, c, d, &c. *delle quali le prime esprimeranno le quantità date, e già note, ma le ultime* x, y, z *esporranno quelle ignote, che*

si

si ricercano; e per esprimere la somma di più parti, vi s' interporrà la croce +, *e per esprimerne la differenza, vi si metterà la lineetta* —; *come per esempio* A + B — C, *espone la somma di* A, *e di* B, *detrattone* C; *e così* b + x + y — c, *importa la somma della data* b, *e delle ignote* x, *e* y *detratta l'altra nota* c; *e così il segno* + *significa* più, *e l' altro* — *significa* meno; *sicchè* A — B + E *spiegasi con dire* A manco B più aggiuntovi E *&c.*

V. *La moltiplicazione di una quantità in un altra si espone congiungendo assieme quelle lettere, che le esprimono; e la divisione si esprime con fare una frazione, in cui una linea separa il dividendo al di sopra, ed il divisore al di sotto: Per esempio* AB, *ovvero* cx, *espongono il prodotto di* A *in* B, *o pure di* c *in* x; *e se fossero più lettere unite insieme*, ACD, *e* bax *&c. si esprimerà il prodotto di* A *in* C, *ed in* D, *ed ancora il prodotto di* e *in* b, *in* a, *in* x; *onde il quadrato di una lettera, cioè di* A *in* A *si scriverebbe* AA, *ed il cubo di essa* AAA; *nel che basterebbe scrivere* A^2 *in vece di* AA, *ed* A^3 *in luogo di* AAA; *ma volendo dividere* ACD *per* BE, *si scriverà* $\frac{ACD}{BE}$, *e così ancora dividendo* A^3 *per* BC, *si scrive* $\frac{A^3}{BC}$; *e parimente* $\frac{ab}{c}$ *esprime* ab *diviso per* c, *ed* $\frac{a^2 b^3}{cx}$ *espone la divisione del prodotto fatto dal quadrato* a, *e dal cubo* b *per il prodotto di* c *in* x.

VI. *L' ugualità poi si esprimerà col segno* =, *cioè*

cioè $AB = CE$, *è il prodotto di* A *in* B *uguale al prodotto di* C *in* E; *e ſimilmente* $ab + ce - bx = cf$ *eſpone, che il prodotto* ab *col prodotto* CE, *detrattone il prodotto* bx *ſarà uguale al prodotto* cf. *L' eſſere poi una quantità maggiore dell' altra ſi eſprime col ſegno* $>$; *e l' eſſere minore, col ſegno* $<$; *come per eſempio* $A > B$ *eſprimerebbe eſſere* A *maggiore di* B, *ed* $ex < ac$ *eſporrà eſſere* ex *minore di* ac.

VII. *Il ſegno della proporzionalità ſi fa in queſta maniera* $A \cdot B :: C \cdot D$ *cioè la proporzione di* A *a* B *è uguale a quella di* C *a* D; *ed ancora in altri eſempj*, $ax - ab + c^2 \cdot e^2 :: cx - ce \cdot be$, *eſpone, che la proporzione di* $ax - ab + c^2$ *ſta al quadrato di* e, *come* $cx - ce$ *al prodotto* be: *Ma ſe una proporzione ſarà maggiore, o minore dell' altra, ſi eſprimerà con l' altro ſegno* $A \cdot D > C \cdot E$, *cioè la proporzione di* A *a* D *è maggiore di quella, che ha* C *ad* E; *o pure eſſendo*, $ax + ab \cdot cx < eb - c^2 \cdot x^2$, *importerà, che la ſomma di* ax *con* ab, *al prodotto di* cx *abbia minore proporzione di quella, che ha il prodotto* eb, *detrattone il quadrato di* c, *al quadrato di* x.

VIII. *Potrebbero poſcia prenderſi per aſſiomi.*

I. *Che le quantità uguali, paragonate ad una terza, averanno ad eſſa ugual proporzione.*

II. *E viceverſa le quantità, che hanno ugual proporzione ad una terza, o alle quali una medeſima ha ugual proporzione, eſſe quantità ſaranno uguali.*

III. *Ed ancora ſe due proporzioni ſono uguali ad una terza proporzione, ſaranno eſſe pure tra loro uguali.*

IV. E

IV. *E se una proporzione è maggiore d'un altra, ed una terza è minore, o uguale a quella seconda, sarà la prima maggiore della terza.*

V. *Alle uguali proporzioni aggiungendo, o sottraendo altre proporzioni uguali, le composte, o residue riusciranno pure uguali.*

PROPOSIZIONE I.

In una aritmetica progressione, che è una continua proporzionalità di termini aritmeticamente crescenti, o decrescenti, con uguale differenza di ciascuno all'altro suo prossimo, il massimo contiene il minimo con tanta moltiplicità di esse differenze, quanti sono essi termini sussequenti al massimo.

SIano i termini continuamente disposti con aritmetica proporzionalità, A, B, C, D, E; essendo A il massimo, ed E il minimo, e la loro continua differenza essendo x, sarà $D = E + x$; e C sarà $= D + x$; onde $= E + 2x$; similmente B sarà $= C + x$, e però $= E + 3x$; e finalmente $A = B + x$ deve essere $= E + 4x$; dunque il massimo è uguale al minimo con la moltiplicità di tante differenze, quanti sono i susseguenti. Così, per esempio, se la progressione aritmetica fosse di questi numeri 20. 17. 14. 11. 8. 5. 2. la differenza de' quali $= 3$, il massimo $20 = 2 + 18$, cioè uguale al minimo con il triplo moltiplicato sei volte (essendo sei li termini sussequenti) ed è 3 via $6 = 18$.

COROLLARJ.

I. Similmente il minimo termine può dirsi uguale al massimo, detrattagli tante volte la differenza, quanti sono i termini avanti al minimo: Per esempio $E = A - 4x$, nel primo esempio addotto, e nel secondo sarà $2 = 20 - 6$ in 3, cioè $20 - 18$.

II. Anzi qualunque intermedio è uguale al massimo, detratta la differenza tante volte, quanto è il numero de' termini da questo a quello; e lo stesso parimente è uguale al minimo con tante differenze, quanti sono i termini susseguenti ad esso. Così $C = A - 2x = E + 4x$; ed il $14 = 20$, meno 2 ternarj, cioè $20 - 6$, ed ancora $= 2 + 4$ via 3, cioè $= 2 + 12$.

PROPOSIZIONE II.

Se quattro grandezze A, B, C, D *sono aritmeticamente proporzionali, la somma dell' estreme* A + D *è uguale alla somma delle medie* B + *C*.

IMperocchè, essendo la loro differenza $= x$, ed A il termine massimo, D il minimo, sarà $C = D + x$; e parimente $A = B + x$; dunque la somma degli estremi $A + D = B + x + D$, e parimente la somma de' medj $B + C = B + D + x$; dunque $A + D = B + C$.

COROLLARJ.

I. Se sono tre grandezze aritmeticamente proporzionali A, B, C, la somma dell' estreme sarà uguale al doppio della media, cioè $A + C = 2B$

$= 2\ B$, essendo in aritmetica proporzionalità $A \cdot B :: B \cdot C$, onde le due medie sono il doppio di B.

II. Nella progressione continua aritmetica di termini proporzionali A, B, C, D, E, F, G, la somma degli estremi $A + G$ sarà uguale alla somma di qualunque due altri ugualmente distanti dagli estremi, cioè $B + F$, ovvero $C + E$; ed essendo il numero di essi dispari, saranno quelle somme ancora uguali al doppio dell' intermedio, cioè $= 2\ D$.

III. Vicendevolmente, se di più termini omogenei sarà la somma degli estremi uguale ad altre somme di due intermedj, bisognerà, che siano essi termini aritmeticamente proporzionali; cioè, se $A + D = B + C$, bisognerà che sia la medesima differenza di A e B, che di C e D, perchè tolti di quà, e di là D, e B, sarà $A - B = C - D$, e però la loro differenza è uguale.

IV. Così in un semicircolo essendo inscritti i due triangoli rettangoli ACB, ADB, per essere il quadrato AC col quadrato CB uguale a' quadrati AD, BD (perchè tanto li due primi, che li due ultimi sono uguali al quadrato del diametro AB) sarà l' eccesso del quadrato BC sopra il quadrato BD uguale all' eccesso del quadrato AD sopra il quadrato AC. FIG. 120.

PROPOSIZIONE III.

Nella continua progressione aritmetica di quanti termini si vogliano, come A, B, C, D, E, F, *ovvero in numeri* 12. 10. 8. 6. 4. 2. *la somma di tutti è uguale alla metà dell' aggregato degli estremi, o*

di altri due ugualmente distanti da essi, moltiplicata nel numero della moltitudine di tutti i termini.

SI rimettano gli stessi termini con ordine inverso, cioè F, E, D, C, B, A; e ne' numeri 2, 4, 6, 8, 10, 12, composti co' precedenti; per il Coroll. 2 della precedente Proposizione sarà la somma di due qualunque

$A \cdot F$	12. 2.
$B . E$	10. 4.
$C \cdot D$	8. 6.
$D \cdot C$	6. 8.
$E \cdot B$	4. 10.
$F \cdot A$	2. 12.

$A + F$, e $B + E$, e $C + D$ &c. tra loro uguali, siccome pure $12 + 2 = 10 + 4 = 8 + 6$ &c. essendo tutti $= 14$; dunque la somma di tutte queste paia sarà l' aggregato degli estremi, o di due qualunque ugualmente distanti da essi, moltiplicato per il numero di essi termini; dunque il prodotto dell' aggregato degli estremi nella moltitudine de' termini proposti uguaglia tutti essi termini posti due volte; però la metà dell' aggregato di detti estremi, o di due da loro ugualmente distanti moltiplicata pel numero della moltitudine di tali termini uguaglia esattamente la somma di essi termini; come può vedersi ne' numeri addotti $12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2$, che sono 6 numeri; ed essendo $12 + 2$, ovvero $10 + 4 = 14$, la cui metà è 7, moltiplicando il 7 per 6, ne proviene 42, e questa è la somma di tutti essi numeri proposti.

COROLLARJ.

I. Se il numero dei termini fosse dispari, come A, B, C, D, E, ovvero 10. 7. 4; essendo

do la ſomma degli eſtremi uguale al doppio di quel di mezzo, ſarà l' aggregato di tutti i termini uguale al prodotto di quel di mezzo nel numero della loro moltitudine; così $10 + 7 + 4 = 7$ moltiplicato in $3 = 21$; e ſe foſſero 20. 17. 14. 11. 8. 5. 2; il numero di mezzo 11 moltiplicato per 7, che è il numero di tanti termini, farà 77, che è l'aggregato di tutti.

II. Ancora col minimo termine, e con la differenza di eſſi termini, e col numero della loro moltitudine ſi può ritrovare l' aggregato di eſſi: Per eſempio ſia *il minimo* $= a$, e la differenza $= x$, e il numero della moltitudine di eſſi termini $= n$, ſarà l' aggregato di tutti $= na + \frac{\overline{n^2 - n}\, x}{2}$, cioè ſi moltiplichi il minimo termine pel detto numero, che ſarà na, e ſi moltiplichi la differenza x pel quadrato di detto numero, detrattone eſſo numero, e diviſo queſto prodotto per metà, che è $\frac{\overline{n^2 - n}\, x}{2}$; imperocchè eſſendo a il minimo termine, il maſſimo ſarà $= a + \overline{n - 1}\, x$, dunque la ſomma di queſti due eſtremi $= 2a + \overline{n - 1}\, x$, che moltiplicata per n, e diviſa per mezzo, rieſce $\frac{2na + \overline{n^2 - n}\, x}{2} = na + \frac{\overline{n^2 - n}\, x}{2}$, come ſopra.

III. Se la ſerie aritmetica comincia dall' unità, e ſegue con ciaſcun numero, il loro aggregato ſarà uguale alla ſomma del quadrato dell' ultimo termine col medeſimo termine, diviſa per mezzo. Per eſempio ſiano i termini 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. pigliſi il quadrato dell' ultimo, che

è 49, ed aggiuntagli la sua radice 7, che diventa 56. (che sarà sempre un numero pari) diviso per mezzo, resta 28; e tale è l' aggregato di tutti que' numeri; Imperocchè essendo il primo numero 1, e l' ultimo uguale al numero della moltitudine di essi, che sia $= n$; la somma di questi estremi moltiplicata pel numero della loro moltitudine, e divisa per mezzo, sarà sempre $= \overline{1 + n}$ in n diviso per mezzo, il che riesce $\frac{n^2 + n}{2}$, e tale però è l' aggregato di essi termini.

IV. Ma se dall' unità si dispongono tutti i numeri dispari, la cui differenza sarà sempre 2, il loro aggregato sempre riuscirà un quadrato, la cui radice è la somma degli due estremi divisa per mezzo; Per esempio sia questa serie 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13., è chiaro, che $1 + 3 = 4$, la cui radice è $\frac{3 + 1}{2} = 2$; ed ancora $1 + 3 + 5 = 9$, la cui radice è $\frac{5 + 1}{2} = 3$; e similmente $1 + 3 + 5 + 7 = 16$, la cui radice è $\frac{7 + 1}{2} = 4$; e così pure aggiuntovi l' altro numero 9, il suo aggregato è 25, la cui radice è $\frac{9 + 1}{2} = 5$; ed annessovi ancora il numero 11, diventa 36, la cui radice è $\frac{11 + 1}{2} = 6$; e parimente compreso il 13. la somma di tutti sarà 49, la cui radice è $\frac{13 + 1}{2} = 7$; e così procedendo, sempre si trova il medesimo.

PROPOSIZIONE IV.

I termini aritmeticamente proporzionali, ancora Convertendo, *ed* alternando *rimangono proporzionali.*

DIcesi *Convertendo*, quando si pigliano i conseguenti per antecedenti, e gli antecedenti per conseguenti; cioè essendo A a B, come C a D, sarà convertendo B ad A, come D a C, rimanendo in essi l' istessa differenza, se non che gli eccessi riescono difetti, o li difetti riescono eccessi.

Dicesi poi *alternando*, quando si paragona il primo antecedente al secondo antecedente, ed il primo conseguente al secondo conseguente cioè A a C, come B a D; imperocchè per la Prop. 2 essendo la somma degli estremi uguale a quella de' medj, cioè $A + D = B + C$, ancora in questa alternazione riesce lo stesso; però ancora in tale dispolizione sono i termini aritmeticamente proporzionali, pel Coroll. 3. della Prop. 2. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARJ.

I. Ancora gli ugualmente moltiplici, o submoltiplici de' termini aritmeticamente proporzionali riescono pure con l' aritmetica proporzione: Per esempio preso il numero m, se sono proporzionali A a B, come C a D, saranno parimente proporzionali mA ad mB, come mC ad mD, ed ancora $\frac{A}{m}$ a $\frac{B}{m}$, come $\frac{C}{m}$ a $\frac{D}{m}$; perchè es-

ſendo la ſomma degli eſtremi uguale a quella de' medj, cioè $A + D = B + C$ ancora tutti moltiplicati, o diviſi per m, rieſcono uguali; cioè $mA + mD = mB + mC$; ed $\frac{A}{m} + \frac{D}{m} = \frac{B}{m} + \frac{C}{m}$; e però queſti ancora ſono aritmeticamente proporzionali.

II. Eſſendo ancora altri quattro termini E, F, G, H aritmeticamente proporzionali, come gli altri A, B, C, D, o con la ſteſſa differenza, o con altra diverſa, aggiunti pure inſieme eſſi termini omologi, cioè $A + E, B + F, C + G, D + H$ ſono aritmeticamente proporzionali; perchè eſſendo $A + D = B + C$, ed $E + H = F + G$, ancora aggiunti queſti a quelli, rieſcono uguali, cioè $A + D + E + H = B + C + F + G$.

III. Anzi ancora diſgiungendo gli omologi minori da' maggiori, reſtano aritmeticamente proporzionali; cioè ſe gli ultimi quattro ſono minori de' primi, riuſciranno proporzionali $A - E$, $B - F, C - G, D - H$, perchè ancora $A + D - E - H = B + C - F - G$: Per eſempio ne' numeri eſſendo proporzionali 21 · 18 :: 16 · 13, e queſti altri 8 · 6 :: 5 · 3 non ſolo compreſi inſieme 21 + 8 · 18 + 6 :: 16 + 5 · 13 + 3, cioè 29 · 24 :: 21 · 16; ma ancora ſottraendo i ſecondi da' primi, ſaranno aritmeticamente proporzionali 21 — 8 · 18 — 6 :: 16 — 5 · 13 — 3, cioè 13 · 12 :: 11 · 10.

PRO-

PROPOSIZIONE V.

Le quantità A, B, C, D *essendo geometricamente proporzionali, il prodotto della moltiplicazione degli estremi è uguale al prodotto della moltiplicazione de' mezzi, cioè* AD = BC.

IL modo, con cui A contiene B, o è contenuto in esso, si esponga con la lettera m (che esprimerà o il doppio, o il triplo &c. o la metà, o il terzo &c. o la radice di qualche numero) sicchè sarà $A = mB$; e così ancora dovrà essere $C = mD$, mentre la loro proporzione geometrica importa, che tanto il primo contenga il secondo, quanto il terzo contiene il quarto, ed ancora quanto è contenuto il primo nel secondo, tanto il terzo si contiene nel quarto; dunque sarà $AD = mBD$, ed ancora $BC = BmD$; ma è lo stesso mBD, che BmD (essendo tanto questo, che quello il prodotto di m in B, ed in D); dunque il prodotto degli estremi AD uguaglia il prodotto de' medj BC. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Vicendevolmente, se il prodotto degli estremi AD è uguale al prodotto de' mezzani BC, saranno geometricamente proporzionali $A \cdot B :: C \cdot D$, perchè in qualunque modo, che il primo A contenga il secondo B, o sia in esso contenuto, sarà $A = mB$; dunque $AD = mBD = BC$; onde da questi due ultimi prodotti levato il B, sarà ancora $mD = C$; onde C nel medesimo modo contiene D, o in esso è contenuto, come A con-

contiene B, o è contenuto in esso; onde sono geometricamente proporzionali.

II. I termini geometricamente proporzionali ancora *convertendo*, ed anche *alternando* (purchè siano tutti quattro omogenei, altrimenti se fossero i due primi d' un genere, e gli altri due d' un altro, non si potrebbe paragonare il primo antecedente all' altro antecedente eterogeneo, nè il conseguente del primo genere al conseguente dell' altro) riescono pure geometricamente proporzionali; imperocchè essendo $AD = BC$, non solo $A \cdot B :: C \cdot D$, ma ancora saranno convertendo $B \cdot A :: D \cdot C$, ed alternando $A \cdot C :: B \cdot D$, essendo tanto in questa, che in quella disposizione il prodotto degli estremi uguale al prodotto de' mezzani, cioè $AD = BC$.

III. Essendo quattro linee proporzionali $A \cdot B$ FIG. 121. $:: C \cdot D$, il rettangolo dell' estreme AD sarà uguale al rettangolo delle medie BC, giacchè $AD = BC$; essendo questi rettangoli il prodotto di un lato nell' altro; e viceversa, se due rettangoli AD, BC sono uguali, starà il lato A del primo al lato B del secondo, come reciprocamente l' altro lato C del secondo al lato D del primo.

IV. Ed essendo tre linee rette continuamente FIG. 122. proporzionali $A \cdot B :: B \cdot C$, il rettangolo dell' estreme uguaglia il quadrato della media, cioè $AC = B^2$; e viceversa essendo un rettangolo uguale ad un quadrato, sono continuamente proporzionali un lato A del rettangolo al lato B del quadrato, ed esso lato B del quadrato all' altro lato C del rettangolo.

FIG. 123. V. Quindi nel cerchio essendosi dimostrato il qua-

quadrato della tangente AH uguale al rettangolo GAI, o all'altro DAB delle ſeganti, ed il quadrato della FE perpendicolare al diametro uguale al rettangolo DEB delle parti di eſſo diametro, e due linee LN, IG, ovvero LN, BD, che ſeganſi dentro il circolo, fare uguali i rettangoli delle loro porzioni, cioè $NML = GMI$, ed $LKN = DKB$, è chiaro, che ſaranno ugualmente proporzionali tanto $GA \cdot AH :: AH \cdot AI$, quanto $DA \cdot AH :: AH \cdot AB$; ed ancora $DA \cdot AG :: AI \cdot AB$, per eſſere $GAI = DAB$, e tanto queſto, che quello $= AH^2$; e parimente proporzionali $DE \cdot EF :: EF \cdot EB$; ed $LM \cdot MG :: IM \cdot MN$, ed $LK \cdot DK :: BK \cdot KN$ per eſſere detti rettangoli tra loro uguali, come ſi ha ne' corollarj della Prop. 19. nella prima Parte, cioè Coroll. 6. 7. 9. ed ancora nell' undecimo, eſſendo $DF^2 = BDE$, ſarà $BD \cdot DF :: DF \cdot DE$.

VI. Per quello ſi è moſtrato al Coroll. 12. dell' iſteſſa Prop. 19. come poſſa dividerſi la retta AB in C, in maniera, che il rettangolo di tutta la AB in una ſua parte BC rieſca uguale al quadrato della rimanente AC, è manifeſto, che così reſterà diviſa ſecondo l' eſtrema, e media ragione, imperocchè eſſendo $ABC = AC^2$ è l'intera AB alla parte AC, come la ſteſſa alla rimanente porzione CB. Anzi aggiungendo alla AC la uguale AD, ſarà pure la BD diviſa in A, ſecondo l' eſtrema, e media ragione, perchè, ſiccome $BC \cdot CA :: CA \cdot AB$, ſarà $BC \cdot CA :: DA \cdot AB$; e componendo $BA \cdot AC$ (cioè $BA \cdot AD$) $:: DB \cdot BA$, però DB, BA, AD rieſcono proporzionali.

FIG. 124.

FIG. 125.

VII.

FIG. 126. VII. Volendo alle due rette DE, EF trovare la terza proporzionale; posta EF perpendicolare a DE, e congiunta DF, fatto l'angolo retto DFB, la qual retta FB convenga con DE prolungata in B, sarà la EB quella terza proporzionale, che ricercavasi, essendo $DEB = FE^2$, e però le linee continuamente proporzionali, cioè $DE \cdot EF :: EF \cdot EB$.

VIII. Ed ancora alle date due rette DE, EB volendo trovare la media proporzionale, poste quelle due insieme congiunte, e sopra il diametro DB fatto il semicircolo BFD, erettavi dal punto E la EF perpendicolare al diametro, sarà essa media proporzionale tra le due parti DE, EB; o pure essendo date le due linee DB, BE, fatto sopra BD il semicircolo, ed eretta la perpendicolare EF, congiunta BF sarà la media proporzionale tra le due DB, BE; ed ancora congiunta DF sarà media proporzionale fra DB, e DE, per essere il quadrato $BF^2 = DBE$; e l'altro quadrato $DF^2 = BDE$, siccome ancora $EF^2 = BED$.

PROPOSIZIONE VI.

Essendo le quantità proporzionali A · B :: C · D, *ancora* componendo *sono proporzionali* A + B · B :: C + D · D, *ed altresì* dividendo *riescono proporzionali* A — B · B :: C — D · D.

IMperocchè, essendo uguali i prodotti $AD = BC$, aggiunto di quà, e di là il prodotto BD, saranno $AD + BD = BC + BD$, onde $A + B \cdot B :: C + D \cdot D$, perchè ancora in questi il prodotto degli estremi uguaglia il prodotto de' mez-

mezzani; ed ancora levando alli due $AD = BC$ lo ſteſſo BD, ſaranno pure $AD - BD = BC - BD$; dunque ancora $A - B \cdot B :: C - D \cdot D$; onde tanto componendo, che dividendo i termini rimangono proporzionali.

COROLLARJ.

I. Ancora *per converſione di ragione*, cioè paragonando gli antecedenti al loro eceſſo ſopra i conſeguenti ſono pure geometricamente proporzionali; imperocchè eſſendo $AD = BC$, levando queſto, e quello dal prodotto AC, ne rieſce $AC - AD = AC - BC$; però $A \cdot A - B :: C \cdot C - D$; e ſe ſono queſti termini tutti omogenei, ſarà pure la differenza degli antecedenti alla differenza de' conſeguenti, come qualſivoglia antecedente al ſuo conſeguente; cioè $A - C \cdot B - D :: A \cdot B :: C \cdot D$; imperocche al prodotto AB levando l'uno, e l' altro de' prodotti uguali AD, e BC, ne riuſcirà $AB - AD = AB - BC$, e però $A - C \cdot B - D :: A \cdot B$; giacchè il prodotto degli eſtremi uguaglia il prodotto de' mezzani.

II. Similmente rimangono proporzionali, paragonando le ſomme, o le differenze de' termini omologi, tanto agli antecedenti, quanto alli conſeguenti, o alle loro ſomme, o alle differenze de' medeſimi, come nella Tavola ſuſſeguente, in cui le prime 12 proporzioni ſi verificano ancora in quei caſi, ne' quali i due primi termini ſono tra loro omogenei, e gli altri due tra di loro, e non co' precedenti; ma tutte poi ſi adattano generalmente a i 4 termini proporzionali tra di loro tutti omogenei.

TA-

TAVOLA ANALOGICA.

1	$A \cdot B :: C \cdot D$
2	$B \cdot A :: D \cdot C.$
3	$A+B \cdot B :: C+D \cdot D$
4	$B \cdot A+B :: D \cdot C+D$
5	$A+B \cdot A :: C+D \cdot C$
6	$A \cdot A+B :: C \cdot C+D$
7	$A-B \cdot B :: C-D \cdot D$
8	$B \cdot A-B :: D \cdot C-D$
9	$A-B \cdot A :: C-D \cdot C$
10	$A \cdot A-B :: C \cdot C-D$
11	$A+B \cdot A-B :: C+D \cdot C-D$
12	$A-B \cdot A+B :: C-D \cdot C+D$
13	$A+C \cdot B+D :: C \cdot D$
14	$B+D \cdot A+C :: D \cdot C$
15	$A+C \cdot B+D :: A \cdot B$
16	$B+D \cdot A+C :: B \cdot A$
17	$A-C \cdot B-D :: C \cdot D$
18	$B-D \cdot A-C :: D \cdot C$
19	$A-C \cdot B-D :: A \cdot B$
20	$B-D \cdot A-C :: B \cdot A$
21	$A+C \cdot B+D :: A-C \cdot B-D$
22	$B+D \cdot A+C :: B-D \cdot A-C$
23	$A+C+B+D \cdot C+D :: B+D \cdot D$
24	$C+D \cdot A+C+B+D :: D \cdot B+D$
25	$A+C+B+D \cdot C+D :: A+C \cdot C$
26	$C+D \cdot A+C+B+D :: C \cdot A+C$

27 $A \cdot C :: B \cdot D$

28 $C \cdot A :: D \cdot B$

29 $A+B \cdot C+D :: B \cdot D$

30 $C+D \cdot A+B :: D \cdot B$

31 $A+B \cdot C+D :: A \cdot C$

32 $C+D \cdot A+B :: C \cdot A$

33 $A-B \cdot C-D :: B \cdot D$

34 $C-D \cdot A-B :: D \cdot B$

35 $A-B \cdot C-D :: A \cdot C$

36 $C-D \cdot A-B :: C \cdot A$

37 $A+B \cdot C+D :: A-B \cdot C-D$

38 $C+D \cdot A+B :: C-D \cdot A-B$

39 $A+C \cdot C :: B+D \cdot D$

40 $C \cdot A+C :: D \cdot B+D$

41 $A+C \cdot A :: B+D \cdot B$

42 $A \cdot A+C :: B \cdot B+D$

43 $A-C \cdot C :: B-D \cdot D$

44 $C \cdot A-C :: D \cdot B-D$

45 $A-C \cdot A :: B-D \cdot B$

46 $A \cdot A-C :: B \cdot B-D$

47 $A+C \cdot A-C :: B+D \cdot B-D$

48 $A-C \cdot A+C :: B-D \cdot B+D$

49 $A+C+B+D \cdot B+D :: C+D \cdot D$

50 $B+D \cdot A+C+B+D :: D \cdot C+D$

51 $A+C+B+D \cdot A+C :: C+D \cdot C$

52 $A+C \cdot A+C+B+D :: C \cdot C+D$

53 $A+B+C+D \cdot A+B :: A+C \cdot A$
54 $A+B \cdot A+B+C+D :: A \cdot A+C$
55 $A+B+C+D \cdot A+B :: B+D \cdot B$
56 $A+B \cdot A+B+C+D :: B \cdot B+D$
57 $A+B+C+D \cdot A-B+C-D :: C+D \cdot C-D$
58 $A-B+C-D \cdot A+B+C+D :: C-D \cdot C+D$
59 $A+B+C+D \cdot A-B+C-D :: A+B \cdot A-B$
60 $A-B+C-D \cdot A+B+C+D :: A+B \cdot A-B$
61 $A+B+C+D \cdot A-C+B-D :: A+C \cdot A-C$
62 $A-C+B-D \cdot A+B+C+D :: A-C \cdot A+C$
63 $A+B+C+D \cdot A-C+B-D :: B+D \cdot B-D$
64 $A-C+B-D \cdot A+B+C+D :: B-D \cdot B+D$
65 $A-B+C-D \cdot C-D :: A+C \cdot C$
66 $C-D \cdot A-B+C-D :: C \cdot A+C$
67 $A-B+C-D \cdot A-B :: A+C \cdot A$
68 $A-B \cdot A-B+C-D :: A \cdot A+C$
69 $A-B+C-D \cdot A-B :: B+D \cdot B$
70 $A-B \cdot A-B+C-D :: B \cdot B+D$
71 $A-C+B-D \cdot A-C :: A+B \cdot A$
72 $A-C \cdot A-C+B-D :: A \cdot A+B$
73 $A-C+B-D \cdot A-C :: C+D \cdot C$
74 $A-C \cdot A-C+B-D :: C \cdot C+D$
75 $A-C+B-D \cdot B-D :: C+D \cdot D$
76 $B-D \cdot A-C+B-D :: D \cdot C+D$
77 $A-C+B-D \cdot B-D :: A+B \cdot B$
78 $B-D \cdot A-C+B-D :: B \cdot A+B$
79 $A-C+B-D \cdot C-D :: B+D \cdot D$
80 $C-D \cdot A-C+B-D :: D \cdot D+B$
81 $A-B-C+D \cdot C-D :: B-D \cdot D$
82 $C-D \cdot A-B-C+D :: D \cdot B-D$
83 $A-B-C+D \cdot C-D :: A-C \cdot C$
84 $C-D \cdot A-B-C+D :: C \cdot A-C$

85 A + B + C + D . A + C :: A + B . A
86 A + C . A + B + C + D :: A . A + B
87 A + B + C + D . B + D :: A — B . B
88 B + D . A + B + C + D :: B . A + B
89 A + B + C + D . C + D :: A — B + C — D . C — D
90 C + D . A + B + C + D :: C — D . A — B + C — D
91 A + B + C + D . A + B :: A — B + C — D . A — B
92 A + B . A + B + C + D :: A — B . A — B + C — D
93 A + B + C + D . A + C :: A — C + B — D . A — C
94 A + C . A + B + C + D :: A — C . A — C + B — D
95 A + B + C + D . B + D :: A — C + B — D . B — D
96 B + D . A + B + C + D :: B — D . A — C + B — D
97 A — B + C — D . A + C :: C — D . C
98 A + C . A — B + C — D :: C . C — D
99 A — B + C — D . A + C :: A — B . A
100 A + C . A — B + C — D :: A . A — B
101 A — B + C — D . B + D :: A — B . B
102 B + D . A — B + C — D :: B . A — B
103 A — C + B — D . A + B :: A — C . A
104 A + B . A — C + B — D :: A . A — C
105 A — C + B — D . C + D :: A — C . C
106 C + D . A — C + B — D :: C . A — C
07 A — C + B — D . C + D :: B — D . D
08 C + D . A — C + B — D :: D . B — D
09 A — C + B — D . A + B :: B — D . B
10 A + B . A — C + B — D :: B . B — D
11 A — C + B — D . B + D :: C — D . D
12 B + D . A — C + B — D :: D . C — D
13 A — B — C + D . B — D :: C — D . D
14 B — D . A — B — C + D :: D . C — D
15 A — B — C + D . A — C :: C — D . C
16 A — C . A — B — C + D :: C . C — D &c.

G PRO-

PROPOSIZIONE VII.

Se maggiore è la ragione di A *a* B, *che di* C *a* D, *il prodotto dell' estreme* AD *sarà maggiore del prodotto delle medie* BC; *e qualunque volta il prodotto dell' estreme è maggiore del prodotto delle mezzane, sarà maggiore la ragione della prima ad una delle medie, che dell' altra media all' ultima.*

IMperocchè, se fosse E a B nella stessa ragione di C a D, sarà pure maggior ragione di A a B, che di E a B, onde A sarà maggiore di E. per la defin. 7. onde il prodotto di AD sarà pure maggiore di ED, ed essendo $ED = CB$, per essere $E \cdot B :: C \cdot D$, dunque AD è altresì maggiore di CB; e vicendevolmente, essendo AD maggiore di CB, sarà ancora maggiore di ED, onde A riesce maggiore di E, ed è maggior ragione di A a B, che di E a B, cioè che di C a D; onde essendo il prodotto de' termini estremi maggiore del prodotto de' mezzani, è maggiore la ragione di A a B, che di C a D.

COROLLARJ.

I. Ancora *alternando* (se sono i termini omologj) sarà maggiore la ragione di A a C, che di B a D, essendo il prodotto AD maggiore del prodotto CB.

II. Ed altresì *componendo*, o *dividendo* i termini analogi, sarà maggior ragione di $A \pm B$ a B, che di $C \pm D$ a D, perchè il prodotto $AD > BC$, aggiunto, o levato di quà, e di là il BD,

sarà

sarà pure $AD \dotplus BD > BC \dotplus BD$; e però $A \dotplus B \cdot B > C \dotplus D \cdot D$, riuscendo il prodotto degli estremi maggiore del prodotto de' mezzani.

III. Ma *convertendo* è minore la ragione di B ad A, che di D a C, mentre il prodotto delli estremi BC riesce minore del prodotto de' mezzani AD; ed ancora per *conversione di ragione* è minore quella di A ad $A - B$, che di C a $C - D$, perchè il prodotto $AC - AD$ sarà minore di $AC - BC$, levandosi dal prodotto AC il prodotto AD maggiore di BC.

PROPOSIZIONE VIII.

Essendo proporzionali A · B :: C · D *ancora gli ugualmente moltiplici degli antecedenti per qualunque numero* m, *e gli ugualmente moltiplici de' conseguenti per qualsivoglia numero* n, *sono pure proporzionali* m A · n B :: m C · n D; *e vicendevolmente, essendo proporzionali gli ugualmente moltiplici degli antecedenti, e gli ugualmente moltiplici de' conseguenti, saranno ugualmente proporzionali essi antecedenti a' conseguenti semplicemente posti.*

PErchè essendo $AD = BC$, moltiplicando l' uno, e l' altro per mn, sarà pure $mAnD = nBmC$; dunque $mA \cdot nB :: mC \cdot nD$; ed essendo questi moltiplici proporzionali, siccome sarà $mAnD = nBmC$, dividendo l' uno, e l' altro per mn, si averà $AD = BC$, e però $A \cdot B :: C \cdot D$.

COROLLARJ.

I. Gli ugualmente moltiplici degli antecedenti essendo proporzionali ad altri ugualmente moltiplici de' conseguenti, è chiaro, che se mA è uguale, o maggiore, o minore di mC, ancora nB è parimente uguale, o maggiore, o minore di nD, altrimenti non sarebbero ancora essi proporzionali; e però si accordano gli ugualmente moltiplici degli antecedenti con gli ugualmente moltiplici de' conseguenti in uguagliare, o superare, o mancare l'uno dall'altro.

II. Onde quelle quantità solamente possono essere proporzionali, in cui tutti gli ugualmente moltiplici degli antecedenti, ed altri ugualmente moltiplici de' conseguenti sempre riescono o parimente uguali, o parimente maggiori, o parimente minori, paragonando i moltiplici degli antecedenti a' moltiplici de' conseguenti; perocchè se mai fosse $mA > nB$; ma poi $mC < nD$, sarebbe $mAnD > nBnD$, ed $nBnD > nBmC$, e però $mAnD > nBmC$, onde non sarebbe $A \cdot B :: C \cdot D$; ma sarebbe $A \cdot B > C \cdot D$, perchè essendo $mAnD > nBmC$, detrattone di quà, e di la mn, sarebbe $AD > BC$.

PROPOSIZIONE IX.

TAV. VIII. FIG. 127.

Le grandezze, che crescono ugualmente, secondo che altre grandezze ugualmente crescono, saranno tra di loro proporzionali: Così li triangoli ugualmente alti ACB, ACD *sono proporzionali alle loro basi* CB, CD; *e così ancora li parallelogrammi* ACBI, ACD*K sono nell' istessa*

sa proporzione de' triangoli ugualmente alti, e delle loro basi,

IMperocchè, essendo tra le medesime parallele *MH*, *GE* tanto i triangoli ugualmente alti *ACB*, *ACD*, quanto i parallelogrammi *ACBI*, *ACDK* sono proporzionali alle basi *CB*, *CD*, perchè posta *CE* doppia di *CB*, ancora il triangolo *ACE* riesce doppio di *ACB*, ed il parallelogrammo *ACEH* si fa doppio di *ACBI*; e prendendo pure la base *CG* tripla di *CD*, tanto il triangolo *ACG* riesce triplo di *ACD*, quanto il parallelogrammo *ACGM* si fa triplo di *ACDK*, per essere sì i triangoli, che i parallelogrammi tra le parallele uguali con le basi uguali, onde ugualmente crescono, crescendo le basi, tanto i triangoli, che i parallelogrammi, e secondo che fosse la $CE = CG$, sarebbe tanto il triangolo $ACE = ACG$, quanto il parallelogrammo $ACEH = ACGM$; e se fosse $CE > CG$, sarebbe pure $ACE > ACG$, ed $ACEH > ACGM$; se fosse $CE < CG$, sarebbe pure $ACE < ACG$, ed $ACEH < ACGM$; e però secondo il Coroll. 2. della precedente proposizione, bisogna che siano proporzionali $CB \cdot CD :: ACB \cdot ACD :: ACBI \cdot ACDK$.

COROLLARJ.

I. Nel cerchio gli angoli *CAB*, *CAD* fatti al centro, o quelli fatti alla circonferenza *CHB*, *CHD*, ed ancora li settori *BCA*, *CDA* sono proporzionali agli archi *BC*, *CD*, sopra di cui sono fatti; imperocchè moltiplicando l' arco FIG. 128.

CB nell'arco CE, e l'arco DC nell' altro CG, si moltiplicheranno ugualmente gli angoli al centro, e alla circonferenza, e li settori medesimi, essendo $CE \cdot CB :: CAE \cdot CAB :: CHE \cdot CHB :: ECA \cdot BCA$, moltiplicandosi ancora essi angoli, ed essi settori, come è moltiplicato l' arco, sopra di cui sono posti: e così ancora $CG \cdot CD :: CAG \cdot CAD :: CHG \cdot CHD :: CGA \cdot CDA$, e se fosse $CE = CG$ sarebbero ancora quei moltiplici angoli, ed i moltiplici settori uguali, e secondo che fosse CE maggiore, o minore di CG, sarebbero pure gli angoli fatti al centro, o alla circonferenza sopra CE parimente maggiori, o minori di quelli fatti sopra CG, ed il settore ECA sarebbe pure maggiore, o minore dell' altro CGA; dunque gli angoli, e li settori fatti sopra gli archi CB, CD sono proporzionali a' detti archi, essendo i moltiplici degli antecedenti, ed i moltiplici de' conseguenti talmente disposti, che si accordano in uguagliarsi, o superarsi, o diminuirsi l'uno dall'altro suo omogeneo.

II. Generalmente gli spazj fatti con uguale velocità in varj tempi, sono proporzionali a' detti tempi, perchè moltiplicatosi il *tempo*, ugualmente si moltiplicano gli spazj, e secondo che il moltiplice del tempo, di cui fu fatto uno spazio, è uguale, maggiore, o minore del moltiplice del tempo, in cui fu corso un altro spazio, ancora lo spazio moltiplice del primo è uguale, maggiore, o minore dello spazio moltiplice del secondo: Per esempio, in un ora si facciano 3. miglia di spazio; e con la stessa velocità in 3.

ore

ore si faranno 9. miglia; ed in 20. minuti facendosi un miglio, in cento minuti si faranno cinque miglia; siccome 3 ore sono maggiori di 100. minuti, essendo quelle 180. minuti; così le 9. miglia, fatte in 3. ore, sono maggiori delle 5. miglia fatte in 100. minuti; e se detti tempi fossero uguali, sarebbero pure gli spazj uguali, e quando un tempo è minore dell' altro, lo spazio del primo è pure minore dello spazio secondo; però sono proporzionali i tempi agli spazj; cioè come un ora a 20. minuti (che è tripla quella di questo) così 3 miglia ad un miglio &c.

PROPOSIZIONE X.

Essendo molti antecedenti A, C, E, G *proporzionali ad altrettanti conseguenti* B, D, F, H, *componendo sarà la somma di tutti gli antecedenti alla somma di tutti i conseguenti, come uno degli antecedenti al suo conseguente.*

IMperocchè, presi gli ugualmente moltiplici degli antecedenti col numero m, ed altri ugualmente moltiplici de' conseguenti col numero n, converranno quelli con questi o nell' ugualità, o nell' eccesso, o nel difetto; cioè se $mA = nB$, ancora mC sarà $= nD$, siccome pure $mE = nF$, ed $mG = nH$; onde tutti gli antecedenti $mA + mC + mE + mG$ saranno uguali a tutti i conseguenti $nB + nD + nF + nH$; e se fosse mA maggiore, o minore di nB, sarebbero pure

$$A \cdot B :: C \cdot D :: E \cdot F :: G \cdot H$$

$$mA \cdot nB :: mC \cdot nD :: mE \cdot nF :: mG \cdot nH$$

re $mA + mC + mE + mG$, maggiori, o minori di $nB + nD + nF + nH$, essendo quelli moltiplici degli antecedenti $A + C + E + G$, come mA è moltiplice di A, e questi altri ancora moltiplici de' conseguenti $B + D + F + H$, come nB è moltiplice di B; però deve essere la somma di tutti gli antecedenti alla somma di tutti i conseguenti, come uno degli antecedenti al suo conseguente, cioè $A + C + E + G \cdot B + D + F + H :: A \cdot B$; il che dovevasi dimostrare.

COROLLARJ.

I. Essendo una progressione continuamente pro-

A	$\cdot$	B	$\cdot$	C	$\cdot$	D	$\cdot$	E	$\cdot$	F
1.		3.		9.		27.		81.		243.

porzionale A, B, C, D, E, F, sarà parimente come il primo termine A al secondo B, così la somma di tutti i termini senza l'ultimo (che saranno tutti gli antecedenti) alla somma di tutti senza il primo (che sono tutti gli conseguenti) cioè $A \cdot B :: A + B + C + D + E \cdot B + C + D + E + F$ cioè $1.\ 3. :: 121 \cdot 363$.

II. La somma di tutti i termini continuamente proporzionali è uguale alla differenza del prodotto del secondo nell' ultimo, dal quadrato del primo, divisa per la differenza de' primi due termini; imperocchè la somma di tutti i termini si chiami $= S$; perchè dunque sarà $A \cdot B :: S - F \cdot S - A$, il prodotto degli estremi essendo uguale al prodotto de' medj, averemo

AS

$AS - AA = BS - BF$; e ſe A è maggiore di B, ſi traſportino eſſi termini in queſta diſpoſizione $AS - BS = AA - BF$; e però dividendo per $A - B$, ſi averà $S = \frac{AA - BF}{A - B}$.

Se poi A foſſe minore di B, ſi traſportino i termini in queſt' altra maniera $BS - AS = BF - AA$, e dividendo per $B - A$, ſarà la ſomma $S = \frac{BF - AA}{B - A}$, cioè ſempre uguale alla differenza del prodotto BF, e del quadrato AA, diviſa per la differenza de' due termini A, e B.

III. Se la ſerie decreſce in infinito dal primo termine maggiore di tutti, ſarà l' ultimo $= 0$; e però $S = \frac{AA}{A - B}$, non dovendo aggiungervi il $- BF$, che è $= 0$, ſupponendoſi l'ultimo F eſſer nulla; onde tali ſerie proporzionali, continuate in infinito a minori, e minori termini fino allo zero ſono uguali al quadrato del primo termine, diviſo con la differenza del primo dal ſecondo: Per eſempio $1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{1}{8} . \frac{1}{16} . \frac{1}{32} . \frac{1}{64}$ &c. in infinito $= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$ ed è $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, per cui diviſa l' unità $= 2$ dunque eſsa continua ſerie $= 2$, e levatane la prima unità, le frazioni $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ &c. $= 1$ e la ſerie delle frazioni $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ &c. $= \frac{1}{2}$, eſſendo il quadrato del primo termine $= \frac{1}{9}$ (che è il ſecondo termine) e la differenza di $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$ per cui diviſo $\frac{1}{9}$ rieſce $\frac{1}{2}$. Similmente la ſerie $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}$ &c. $= \frac{1}{3}$ perchè il quadrato del primo termine è il ſecondo $\frac{1}{16}$ che diviſo per $\frac{1}{4} - \frac{1}{16}$, cioè per $\frac{3}{16}$, diventa $= \frac{1}{3}$;

$= \frac{1}{3}$; e così le altre ſerie proporzionali, che cominciano dopo l' unità con una frazione ſono uguali al medeſimo modo; cioè ſe il denominatore è il numero n, deve levarſi l' unità, e allora la prima frazione con tale denominatore è uguale a tutta la ſerie continua: Per eſempio ſe la ſerie foſſe $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^5}$ &c. sarà $= \frac{1}{n-1}$; e così $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000}$ &c. $= \frac{1}{9}$, ed ancora $\frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{2}{10000}$ &c. ſarebbe $= \frac{2}{9}$ eſſendo il doppio dell' antecedente; onde può dirſi generalmente, che la ſerie continuamente proporzionale in infinito prodotta, come $\frac{m}{n} + \frac{m}{n^2} + \frac{m}{n^3} + \frac{m}{n^4} + \frac{m}{n^5}$ &c. $= \frac{m}{n-1}$

IV. Quindi può ſcioglierſi il Soſiſma di Zenone, col quale pretendeva dimoſtrare, che Achille non poteſſe mai arrivare col ſuo moto la Teſtuggine, perchè nel tempo, in cui quello faceva un miglio, queſta ne faceva la decima parte, e compita da quello l' iſteſſa decima parte, queſta ſi avanzava per una parte centeſima, e quello giungendo al termine di eſſa centeſima parte, queſta ſarebbe avanti la parte milleſima &c. Nel che può oſſervarſi, che quella ſerie di parti di miglio $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$, ſono $= \frac{1}{9}$ di miglio, al quale arrivando la Teſtuggine, vi ſarebbe pure giunto Achille, e l' averebbe arrivata, perchè avendo eſſo una velocità dieci volte maggiore di quella della Teſtuggine, poteva

fare

fare dieci parti none del miglio nel tempo, che ne faceva questa una nona parte; onde essendo lontano da essa un miglio, nel tempo medesimo potè arrivarla, avendo fatto un miglio ed $\frac{1}{9}$, cioè $\frac{10}{9}$ parti del miglio, quando quella ne fece una sola nona parte.

PROPOSIZIONE XI.

Essendo quante si vogliano grandezze omogenee A, B, C, D *da una parte, ed altre, o dello stesso, o di genere diverso* E, F, G, H, *omogenee tra loro; e siano* ordinatamente *proporzionali* A · B :: E · F; *ed ancora* B · C :: F · G, *ed altresì* C · D :: G · H; *ovvero* perturbatamente, *fosse* A · B :: G · H, *ma* B · C :: E · F, *e* C · D :: F · G; *tanto in questo modo promiscuo, quanto nel primo esattamente disposto, sarà la prima* A *all' ultima* D, *come la prima* E *all' ultima* H.

A	3	E	9	15
B	5	F	15	24
C	8	G	24	30
D	10	H	30	50

IMperocchè la ragione di *A* a *D*, per la definiz. 8. si compone delle ragioni *A* · *B*, di *B* · *C*, e di *C* · *D*; e parimente la ragione di *E* ad *H* è composta di *E* · *F*, di *F* · *G*, e di *GH*; dunque essendo tutte le ragioni della prima serie uguali ad altrettante della serie seconda, o con ordine continuo, o con ordine perturbato, deve essere uguale la ragione di *A* · *D* all' altra di *E* · *H*. Il che dovea dimostrarsi.

Co-

COROLLARJ.

I. Se fosse $A \cdot B :: C \cdot D$, e poscia un altro termine E allo stesso B, come un altro F al medesimo D, sarà pure $A + E \cdot B :: C + F \cdot D$, perchè convertendo, $B \cdot E :: D \cdot F$, dunque per questa proposizione, $A \cdot E :: C \cdot F$, e componendo $A + E \cdot E :: C + F \cdot F$; ed è $E \cdot B :: F \cdot D$, dunque $A + E \cdot B :: C + F \cdot D$.

FIG. 129. II. I triangoli, o i parallelogrammi ABC, EBD, che hanno un angolo B uguale, saranno tra di loro in ragione composta de' lati, che sono intorno quell' angolo, cioè di AB a BD, e di CB a BE; imperocchè posto il lato BD in direzione del lato BA, onde per l' ugualità dell' angolo riuscirà ancora il lato EB nella direzione del lato BC, congiunta la retta CD ne' triangoli, o prolungate ne' parallelogrammi le rette GD, FC, che concorrano in H, onde riuscirà di mezzo il triangolo CBD, ed il parallelogrammo $CBDH$, sarà il triangolo ABC al triangolo CBD, o pure ancora il parallelogrammo BF al parallelogrammo BH in ragione delle basi AB a BD, essendo ugualmente alti essi triangoli, e parallelogrammi; ma il triangolo CBD al triangolo EBD, ed ancora il parallelogrammo BH al parallelogrammo BG, che sono pure ugualmente alti, sono in ragione delle basi loro, CB a BE; dunque perchè il triangolo ABC al triangolo EBD è in ragione composta di ABC a CBD, e di CBD ad EBD, sarà pure ABC ad EBD in ragione composta di AB a BD, e di CB a BE; e lo stesso riesce ne' parallelogrammi $ABCF$, $EBDG$, la

cui

cui ragione è compoſta di BF a BH, e di BH a BG, e però è compoſta della ragione de' lati AB a BD, e CB a BE, che ſono intorno al loro angolo uguale B, come dovea dimoſtrarſi.

III. Se i lati de' triangoli, o de' parallelogrammi intorno all'angolo uguale ſono reciprocamente proporzionali, cioè $AB \cdot BD :: EB \cdot BC$, eſſi triangoli, o parallelogrammi ſaranno tra di loro uguali, perchè ſimilmente il triangolo, o parallelogrammo ABC al mezzano CBD, ſarà come EBD allo ſteſſo CBD, eſſendo come le loro baſi reciprocamente proporzionali, e però $ABC = EBD$.

PROPOSIZIONE XII.

Se la ragione di due quantità, come A *a* B, *ſia compoſta delle ragioni di* C *a* D, *di* E *ad* F, *e di* G *ad* H, *ſarà eſſa ragione uguale a quella del prodotto degli antecedenti al prodotto de' conſeguenti, cioè* A · B :: CEG · DFH.

A · 90	C · 3	D · 7
B · 91	E · 15	F · 2
	G · 4	H · 13

IMperocchè ancora tali prodotti CEG, DFH ſono in ragione compoſta di C a D, di E ad F, e di G ad H, potendoſi paragonare CEG a DEG, DEG a DFG, e DFG a DFH, de' quali eſſendo il primo al ſecondo come C a D, il ſecondo al terzo come E ad F, ed il terzo al quarto come G ad H, ſarà di queſte ſteſſe ragioni compoſta la ragione di CEG a DFH, per la def. 8. e però eſſendo A a B parimente in ragione com-

po-

$AF \cdot DH :: FB \cdot BH :: FG \cdot HI :: GB \cdot BI :: GC \cdot IE$; onde ancora permutando $DH \cdot HI :: AF \cdot FG$, ed $HI \cdot IE :: FG \cdot GC$.

FIG. 132. III. E se volesse dividersi una retta *BC* nell' istessa proporzione, in cui fosse divisa un altra *BA* ne' punti *D*, *F*; congiunta la retta *AC*, e tirategli parallele le rette *DE*, *FG*, sarà essa *BC* divisa nella stessa proporzione, in cui è divisa quella.

FIG. 133. IV. Volendo alle due linee *BD*, *DA* trovare la terza proporzionale, aggiunta in qualche angolo alla retta *BDA* la *BE* uguale a *DA*, congiunta *DE*, e tiratagli parallela la *AC*, che convenga con *BE* prolungata in *C*, sarà la *EC* la terza proporzionale, essendo $BD \cdot DA :: BE \cdot EC$, e la $BE = DA$; e se fossero tre linee diverse *BD*, *DA*, *BE*, fatto il medesimo come sopra, riuscirebbe *EC* quarta proporzionale alle tre date.

PROPOSIZIONE XIV.

FIG. 134. *Se li triangoli* ABC, FGH *sono equiangoli, essendo l' angolo* A *uguale all' angolo* F, *ed il* B *al* G, *ed il* C *all'* H, *averanno i lati proporzionali, e si dimanderanno* Triangoli simili.

SI ponga intorno l' angolo $A = F$ la parte *AD* del lato $AB = FG$, e la parte *AE* del lato $AC = FH$; congiunta *DE* sarà uguale ancor essa a *GH*, e l' angolo $ADE = FGH$, il quale si suppone $= ABC$; dunque *DE* riesce parallela a *BC*; e però $AB \cdot AD :: BC \cdot DE :: CA \cdot AE$; dunque essendo i lati del triangolo *ADE* uguali a quelli del dato triangolo *FGH*, sono proporzionali i lati $AB \cdot FG :: BC \cdot GH :: CA \cdot FH$, e permutando,

AB

$AB \cdot AC :: GF \cdot FH$; ed $AC \cdot CB :: FH \cdot HG$; perciò diconsi triangoli simili.

COROLLARJ.

I. Essendo intorno agli angoli uguali A, F li due lati BA, ed AC proporzionali alli due GF, FH, ancora gli altri angoli saranno uguali, e l'altro lato BC al primo BA, ed al secondo CA sarà nella stessa proporzione che GH ad FG, e ad FH, cioè essi triangoli saranno simili; imperocchè fatta $AD = FG$, ed $AE = FH$, congiunta DE, sarà parallela a BC, essendo pure $BA \cdot AC :: AD \cdot AE$, e permutando $AB \cdot AD :: CA \cdot AE$; onde gli angoli ADE, ed AED, che sono gli stessi degli altri FGH, FHG, saranno uguali agli angoli ABC, ACB.

II. Essendo tutti i lati del triangolo ABC proporzionali a' lati del triangolo FGH, cioè $BA \cdot GF :: CA \cdot HF :: BC \cdot GH$, essi triangoli pure saranno equiangoli, e però simili; perchè poste $AD = GF$, ed $AE = FH$, sarà pure $BA \cdot AD :: CA \cdot AE$, e congiunta DE, sarà parallela a BC, onde $BC \cdot DE :: CA \cdot AE$, cioè $:: CA \cdot FH$, e però $:: BC \cdot GH$; onde ancora $DE = GH$, e però ADE sarà equiangolo ad FGH, onde ancora ABC sarà equiangolo ad FGH.

III. Nel triangolo rettangolo ABC condotta dall' angolo retto sopra la base AC la perpendicolare BD, saranno i triangoli ABD, CDB simili tra di se, ed ancora simili al triangolo intero ABC, essendo tutti tre equiangoli; e la perpendicolare BD è media proporzionale fra le due porzioni AD, DC, essendo $AD \cdot BD$ FIG. 135.

 $:: BD$

:: $BD \cdot DC$; ed i lati AB, e BC sono medj proporzionali tra la base AC, e le parti corrispondenti AD, DC; essendo $AC \cdot AB :: AB \cdot AD$; ed $AC \cdot CB :: CB \cdot CD$.

PROPOSIZIONE XV.

I poligoni ABCDE, FGHIK *del medesimo* FIG. 136. *numero di lati, avendo l' uno gli angoli uguali agli angoli corrispondenti dell' altro, compresi da' lati proporzionali, si possono dividere in triangoli simili, e tutta la figura dell' uno dicesi* simile *a quella dell' altro.*

Essendo l' angolo B uguale all' angolo G, condotte le rette AC, FH, saranno i triangoli ABC, FGH simili, per essere intorno agli angoli B, e G uguali i lati proporzionali $AB \cdot BC :: FG \cdot GH$; e così ancora il triangolo AED sarà simile al triangolo FKI, ed ancora CAD simile ad HFI, perchè essendo l' angolo $BAE = GFK$, e l' angolo $BAC = GFH$, e l' altro $DAE = IFK$, il rimanente $CAD =$ sarà HFI, e proporzionali $CA \cdot AD :: HF \cdot FI$; dunque tutti i triangoli, inscritti nell' uno, sono simili a' triangoli inscritti nell' altro, onde la figura $ABCDE$ riesce simile all' altra $FGHIK$.

COROLLARJ.

I. Tutto il perimetro di un poligono a tutto il perimetro dell' altro simile è proporzionalmente come il lato dell' uno al lato corrispondente dell' altro, perchè essendo qualsivoglia lato del primo Poligono proporzionale al lato corrispondente

te

te del secondo Poligono, saranno pure tutti i lati del primo, che sono il suo perimetro, a tutti i lati del secondo, che compongono il perimetro di questo, nell' istessa ragione, in cui un lato del primo è al lato corrispondente del secondo.

II. Ne' due cerchj concentrici condotte per lo centro *N* quante si vogliano rette, seganti amendue le periferie, *NGA*, *NHB*, *NIC* &c. e tirate le corde agli archi segati, cioè *AB*, e *GH*; *BC*, ed *HI*; *CD*, ed *IK* &c. riusciranno simili i poligoni *ABCDE*, e *GHIKL*, e tutti li triangoli congiunti al centro col medesimo angolo saranno simili, *ANB* a *GNH*, e *BNC* ad *HNI* &c. e li perimetri di tali poligoni, siccome sono proporzionali a' lati corrispondenti, *BA*, ed *HG*, così ancora sono come i raggi de' cerchj, cui sono inscritti, essendo per la similitudine de' triangoli *BA* · *HG* :: *AN* · *GN*. FIG. 137

III. Che però potendosi accrescere il numero, e diminuire la grandezza de' lati de' poligoni all' infinito, dovrà finalmente tal proprietà de' poligoni simili iscritti ne' cerchj verificarsi ancora delle circonferenze dei medesimi cerchj, che sono l' ultimo termine, nel quale vanno a finire i perimetri de' poligoni simili, moltiplicato che sia in infinito il numero de' lati, e in questa maniera le circonferenze de' cerchj si dimostrano proporzionali a i raggi loro, e a' diametri.

II. Ed essendo ancora i quadrati di qualsivoglia lato simili tra loro, sono pure in duplicata ragione di essi lati; onde i triangoli simili, ed i poligoni simili, ed ancora i cerchj essendo in duplicata ragione de' loro lati, o de' loro perimetri, o de' diametri, sono ancora in duplicata ragione de' quadrati fatti da' lati, o diametri de' Poligoni, o da' raggi de' circoli, o dalle loro circonferenze.

TAV. IX. FIG. 140.

III. Essendo in ogni triangolo rettangolo *BAC* il quadrato della base *BC* uguale alli quadrati de' lati *AB*, *AC* (Coroll. I. Proposiz. 18. nella parte I.) ne segue, che ancora qualsivoglia figura *BHIC*, fatta sopra essa base *BC*, sarà uguale alle simili figure *BDEA*, *CGFA*, fatte sopra i lati *AB*, *AC* contenenti l'angolo retto, essendo tali figure simili, come i loro quadrati, o siano poligoni rettilinei, o circoli, o semicircoli, o settori simili di tali cerchj.

FIG. 142.

IV. Sopra la retta *BC* fatto un semicircolo, ed a qualunque punto *A* congiunte le rette *BA*, *CA*, e sopra di esse fatti li semicircoli *BDA*, *CFA*, essendo l' angolo *BAC* retto, sarà il semicircolo *BHAIC* uguale alli due semicircoli *BDA*, *CFA*; e toltine gli spazj comuni *BHA*, *CIA*, saranno le due lunule *ADBHA*, *AFCIA* uguali al rimanente triangolo *BAC*; e se il punto *A* fosse nel mezzo della semicirconferenza, detti semicircoli sarebbero uguali, avendo pure le rette *BA*, ed *AC* uguali, e li segmenti *BHA*, *CIA* sarebbero uguali, onde ancora le lunule essendo uguali, sarebbe ciascheduna uguale alla metà del triangolo *BAC*.

PROPOSIZIONE XVI.

I triangoli simili ABC, FGH *sono in duplicata ragione de' loro lati omologj*, AC, GH.

FIG. 138. SI faccia, come $AC \cdot GH :: GH \cdot CI$, che sarà la terza proporzionale, e si congiunga BI. Sarà il triangolo $BCI = FHG$ pel Coroll. 3. della Prop. XI. essendo gli angoli C, ed H uguali, ed i loro lati reciprochi, perchè essendo $BC \cdot FH :: AC \cdot GH$, ed $AC \cdot GH :: GH \cdot CI$, sono $BC \cdot FH :: HG \cdot CI$; dunque il triangolo ABC all'altro simile GFH è come ABC a BCI, cioè come la base AC alla base CI; ed è AC a CI in duplicata ragione di AC a GH, per la defin. 9. dunque i triangoli simili ABC, GFH sono in duplicata ragione de' lati omologj AC, e GH. Il che &c.

COROLLARJ.

FIG. 139. I. Quindi ancora tutti i Poligoni simili $ABCDE$, $FGHIK$ dividendosi, per la prop. 15. in altrettanti simili triangoli, sono pure in duplicata ragione de' loro lati omologj, come sono tali triangoli; perchè essendo ABC ad FGH in duplicata ragione di BC a GH; e CAD ad HFI in ragione duplicata di CD ad HI (che è la medesima di BC a GH) ed ancora DAE ad IFK in ragione duplicata de' lati DE ad IK (che sono pure come CD ad HI), sono però tutti i triangoli del Poligono $ABCDE$ a tutti quelli dell'altro simile poligono $FGHIK$ in duplicata ragione de' lati omologj.

II. Ed

II. Ed essendo ancora i quadrati di qualsivoglia lato simili tra loro, sono pure in duplicata ragione di essi lati; onde i triangoli simili, ed i poligoni simili, ed ancora i cerchj essendo in duplicata ragione de' loro lati, o de' loro perimetri, o de' diametri, sono ancora in duplicata ragione de' quadrati fatti da' lati, o diametri de' Poligoni, o da' raggi de' circoli, o dalle loro circonferenze.

TAV. IX. FIG. 140.

III. Essendo in ogni triangolo rettangolo *BAC* il quadrato della base *BC* uguale alli quadrati de' lati *AB*, *AC* (Coroll. I. Proposiz. 18. nella parte I.) ne segue, che ancora qualsivoglia figura *BHIC*, fatta sopra essa base *BC*, sarà uguale alle simili figure *BDEA*, *CGFA*, fatte sopra i lati *AB*, *AC* contenenti l'angolo retto, essendo tali figure simili, come i loro quadrati, o siano poligoni rettilinei, o circoli, o semicircoli, o settori simili di tali cerchj.

FIG. 141.

IV. Sopra la retta *BC* fatto un semicircolo, ed a qualunque punto *A* congiunte le rette *BA*, *CA*, e sopra di esse fatti li semicircoli *BDA*, *CFA*, essendo l' angolo *BAC* retto, sarà il semicircolo *BHAIC* uguale alli due semicircoli *BDA*, *CFA*; e toltine gli spazj comuni *BHA*, *CIA*, saranno le due lunule *ADBHA*, *AFCIA* uguali al rimanente triangolo *BAC*; e se il punto *A* fosse nel mezzo della semicirconferenza, detti semicircoli sarebbero uguali, avendo pure le rette *BA*, ed *AC* uguali, e li segmenti *BHA*, *CIA* sarebbero uguali, onde ancora le lunule essendo uguali, sarebbe ciascheduna uguale alla metà del triangolo *BAC*.

PROPOSIZIONE XVII.

Nel triangolo ABC *condotta dal vertice* A *la retta* AD *ſopra la baſe* BC, *o al di dentro, o al di fuori di eſſo triangolo, ſarà* BD *a* DC *in ragione composta de' lati* AB, *ed* AC, *e del ſeno dell' angolo* BAD *al ſeno dell' angolo* CAD, *li quali ſeni ſono le perpendicolari, condotte da qualunque punto di eſſa retta* AD *ſopra i lati* AB, AC.

FIG. 142. IMperocchè dal punto *D* tirate eſſe perpendicolari *DE*, *DF* ſopra i lati del triangolo, è manifeſto, eſſere *BD* a *DC*, come il triangolo *BAD* al triangolo *DAC*, che hanno la medeſima altezza; dunque ſono in ragione composta delle *AB*, ed *AC*, che ſono loro baſi, e dell' altezze *DE*, *DF* di tali triangoli; ma tali perpendicolari *DE*, *DF* ſono i ſeni particolari degli angoli *BAD*, *CAD*, eſſendo *AD* il ſeno totale oppoſto all' angolo retto, che ſarebbe un raggio del cerchio deſcritto per lo centro *A*; dunque *BD* a *DC* è in ragione composta de' lati *AB*, *AC*, e de' ſeni dagli angoli *BAD*, *CAD*; Il che dovea dimoſtrarſi.

COROLLARJ.

I. Se la retta *AD* divide pel mezzo l' angolo interno *BAC*, o l' eſterno *CAE*, i loro ſeni *DE*, *DF* ſaranno uguali; però *BD* a *DC* ſarà ſolamente, come il lato *AB* al lato *AC*.

II. E ſe i lati *AB*, *AC* foſſero uguali, ſarebbe *BD* a *DC* ſolamente, come il ſeno dell' angolo *BAD* al ſeno dell' angolo *DAC*.

III. Quindi vicendevolmente, se fosse BD a DC, come il lato AB al lato AC, la retta AD dividerebbe pel mezzo l'angolo interno BAC, o l'esterno CAE, e se fossero $BD \cdot DC :: DE \cdot DF$, cioè come i seni degli angoli opposti, sarebbero i lati AB, ed AC uguali.

IV. Se in un triangolo ABC si dividono pel mezzo l'angolo A con la retta AD, e l'angolo C con la retta CH, le quali rette convengano in G, congiunta la BGI, taglierà pel mezzo l'altro angolo B, perchè essendo $AB \cdot AC :: BD \cdot DC$; e permutando $AB \cdot BD :: AC \cdot DC$; ed $AC \cdot DC :: AG \cdot GD$, essendo l'angolo ACD diviso pure pel mezzo dalla CGH, dunque $AB \cdot BD :: AG \cdot GD$; dunque ancora l'angolo ABD è diviso pel mezzo dalla BGI; onde le rette seganti pel mezzo tutti gli angoli d'un triangolo convengono insieme nel medesimo punto G. FIG. 143.

PROPOSIZIONE XVIII.

Se la retta AD *tocca il cerchio* EDB *nel punto* D, *condotta la perpendicolare* DG *sopra il diametro* AECB, *tutte le linee condotte da' punti* A, *e* G *a qualsivoglia punto* F *della circonferenza, come* AF, e GF, *sono proporzionali alle stesse parti* AE, ed EG. FIG. 144.

IMperocchè condotti dal centro i raggi CD, CF; essendo l'angolo ADC retto, è $AC \cdot CD :: CD \cdot CG$; dunque ancora sono proporzionali $AC \cdot CF :: CF \cdot CG$; onde il triangolo ACF, e l'altro FCG sono simili, aven-

do intorno all' angolo medesimo C i lati proporzionali, però l' angolo $CAF = CFG$; ed è l' angolo $CFE = CEF = EAF + AFE$; dunque $CFG + GFE = EAF + AFE$; ed essendo $CFG = EAF$, sarà pure $GFE = AFE$; dunque l' angolo AFG è diviso pel mezzo dalla retta FE; e però $AF \cdot FG :: AE \cdot EG$, in qualunque punto siano condotte le rette alla periferia circolare dalli due punti A, G. Il che dovea dimostrarsi.

Corollarj.

FIG. 145. I. Essendo ancora $AD \cdot DG :: AF \cdot FG$, il rettangolo di AD in GF è uguale al rettangolo di AF in DG, ed ancora tirate altre due linee dagli stessi punti A, G ad un altro punto H della circonferenza, essendo ancora queste $AH \cdot GH :: AF \cdot FG$, sarà pure il rettangolo dell' estreme uguale al rettangolo delle mezzane, cioè AH in $FG = GH$ in AF.

II. Essendo ancora le porzioni del diametro $AB \cdot BG :: AE \cdot EG$, dicesi questa *Proporzione Armonica*; essendo delle tre linee AB, EB, GB, la prima alla terza, come la differenza della prima dalla media alla differenza della media dalla terza; in cui ancora permutando $AB \cdot AE :: BG \cdot GE$, cioè delle tre linee BA, GA, EA la prima alla terza è come l' eccesso della prima dalla seconda all' eccesso della seconda dalla terza; e quella linea di mezzo dicesi *Media Armonica*.

PRO-

PROPOSIZIONE XIX.

FIG. 146.

Essendo la linea AB *divisa ne' punti* E, G *armonicamente, preso fuori qualunque punto* D; *e da esso condotte le rette* DA, DE, DG, DB, *qualunque altra linea, che tra esse si tiri* MOKN, *sarà essa pure armonicamente divisa, cioè ancora* MN · NK :: MO · OK.

SI tiri per lo punto *G* la retta *FGH* parallela a *DA*, concorrente con le rette *DB*, *DE* in *H*, *F*, sarà *GH* = *GF*; perchè essendo simili li triangoli *ABD*, e *BHG*; ed ancora simili *AED*, *GEF*; dunque *AD* · *GH* :: *AB* · *BG* :: *AE* · *EG* :: *AD* · *GF*; dunque *GH* = *GF*; e per lo punto *K* tirata un altra *IKL* parallela ad *AD*, ed altresì ad *FGH*, sarà ancora *IK* = *KL*; dunque *DM* · *KL* :: *DM* · *KI*; ma essendo simili pure i triangoli *DMN*, *LKN*, e gli altri due *DMK*, *IKO*, sarà pure *MN* · *NK* :: *DM* · *KL* :: *DM* · *KI* :: *MO* · *OK*; dunque ancora la retta *MN* è divisa dall' istesse rette armonicamente, essendo *MN* · *NK* :: *MO* · *OK*. Il che &c.

COROLLARJ.

FIG. 147.

I. Se le rette *AM*, *EO*, *GK*, *BL* non convenissero in un punto *D*, ma fossero tra loro parallele, è manifesto, che qualunque altra retta *MOKN*, segata da esse, sarà divisa armonicamente, essendo nella stessa proporzione *AB*, ed *MN* segate da esse parallele, cioè *AB* · *BG* :: *MN* · *NK*; ed *AE* · *EG* :: *MO* · *OK*; onde sic-

ſiccome, $AB \cdot BG :: AE \cdot EG$, così pure $MN \cdot NK :: MO \cdot OK$.

FIG. 148. II. Volendo ſegare armonicamente una retta AB, fattoci ſopra un triangolo ADB, e per qualſivoglia punto G condotta la retta GH parallela ad AD, e prolungatala in F, di maniera, che ſia $GF = GH$, congiunta DF, che ſeghi la baſe AB in E, ſarà AB armonicamente diviſa, perchè $AD \cdot GH :: AD \cdot FG$; ed è $AD \cdot GH :: AB \cdot BG$; ed $AD \cdot GF :: AE \cdot EG$; dunque $AB \cdot BG :: AE \cdot EG$.

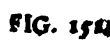
FIG. 149. III. In un triangolo ADG diviſo pel mezzo l'angolo interno ADG con la retta DE, e l'eſterno GDC diviſo pure pel mezzo con la retta DB, ſarà diviſa la retta $AEGB$ armonicamente, perchè ſarà tanto AB a BG, come i lati AD a DG, quanto AE ad EG, come i ſuddetti lati, pel Coroll. I. della Prop. 17. dunque $AB \cdot BG :: AE \cdot EG$: Ove ſi avverta, che l' angolo EDB ſarà retto, eſſendo la ſomma degli angoli $EDG + GDB$ uguale alli rimanenti $ADE + BDC$, e però eſſo angolo EDB è la metà della ſomma degli angoli fatti in D ſopra la retta AC, li quali eſſendo uguali a due retti, biſogna che la loro metà EDB ſia pure un angolo retto.

PROPOSIZIONE XX.

FIG. 150. *In qualſivoglia quadrilatero iſcritto nel cerchio il rettangolo contenuto da' ſuoi diametri* AC, *e* BD, *è uguale alli due rettangoli fatti dai lati oppoſti*, AB *in* DC, *ed* AD *in* BC.

Fac-

FAcciasi l' angolo ABE uguale a DBC; essendo ancora l' altro angolo $BAE = BDC$, sono simili essi triangoli BAE, BDC, onde $BA \cdot AE :: BD \cdot DC$, ed il rettangolo AB in DC è uguale al rettangolo di BD in AE; similmente l' angolo CBE sarà uguale all' angolo ABD, essendo DBE comunemente aggiunto agli uguali angoli DBC, e ABE; onde ancora il triangolo BCE sarà simile al triangolo BDA, essendovi pure uguali gli angoli BCE, BDA; dunque $BC \cdot CE :: BD \cdot DA$, e però il rettangolo AD in BC è uguale al rettangolo BD in CE; dunque BD in $AE + BD$ in CE, cioè BD in $AC = AB$ in DC, $+ AD$ in BC. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Se le corde AD, DC sono uguali, e così pure gli archi, e gli angoli ABD, DBC, segandosi i diametri del quadrilatero in E, sarà BD in $AE = AB \times DC = BAD$; e DB in $CE = AD \times BC = DCB$; sicchè in tali triangoli BAD, BCD il rettangolo de' lati è uguale al rettangolo della base in quella porzione di linea, dal loro vertice alla base proposta, cioè $BAD = BD \times AE$, e $BCD = BD \times CE$. FIG. 150

II. Essendo pure ivi $AC \times BD = AD \times BC + DC \times AB$, cioè $= AD$ in $BC + BA$; dunque $AD \cdot AC :: DB \cdot CB + AB$.

III. Onde preso un altro punto b, e tirate le corde Cb, Ab, Db, sarà pure $AD \cdot AC :: Db \cdot Cb + Ab$; dunque qualsivoglia retta DB alla somma delle due corde CB, AB è nella stessa proporzione, in cui un altra retta Db è alla som-

somma delle corde Cb, Ab, quando l' arco ADC è diviso pel mezzo in D.

IV. Se poi fosse ancora $AD = AC$, cioè quando il triangolo inscritto nel cerchio fosse equilatero, sarebbe pure qualunque media DB uguale alla somma dell' estreme $CB + AB$, e così pure $Db = Cb + Ab$.

PROPOSIZIONE XXI.

FIG. 152.

Nel triangolo ADG *diviso pel mezzo l' angolo interno* GDA *colla retta* DE; *ed ancora l' esterno* GDC *colla retta* DB, *la quale converrà colla base* AG *prolungata in* B, *purchè le rette* AD, *e* DG *non siano uguali, sarà il rettangolo* ADB *uguale al rettangolo* AEG *col quadrato* DE; *ed ancora uguale al rettangolo* ABG, *detrattone il suo quadrato* DB.

IMperocchè circoscritto il cerchio $AFGH$ intorno al dato triangolo ADG, e prodotte le rette DE, BD nella sua periferia in F, ed H, si congiungano le rette AF, AH. Primieramente circa la divisione dell' angolo interno ADG, si averà il triangolo ADF simile all' altro GDE, per essere uguali gli angoli ADF, GDE; ed ancora gli altri due AFD, EGD; però sarà $FD \cdot DA :: GD \cdot DE$; dunque sarà il rettangolo $ADG = FDE$, cioè $= FED + DE$, che è il rettangolo $FED = AEG$, onde il rettangolo de' lati AD, e DG uguaglia il rettangolo delle parti della base AE, ed EG, col quadrato della retta DE, che divide pel mezzo l' angolo interno ADG. Secondariamente, circa la divisione dell' an-

angolo esterno GDC colla retta DB in due parti uguali, sarà pure il triangolo ADH simile all' altro BDG, per essere l' angolo $ADH = BDC = BDG$, e l' angolo $AHD = BGD$, perchè tanto questo, che quello con l' angolo AGD comprende due retti (come si è dimostrato nella parte prima Prop. 14. Coroll. 2. che il quadrilatero inscritto nel cerchio, come $AHDG$, ha gli due angoli opposti H, e G uguali a due retti) dunque sono $AD \cdot DH :: BD \cdot DG$, e però $ADG = BDH = HBD - BD^2$; ed è $HBD = ABG$; dunque $ADG = ABG - BD^2$, onde il rettangolo de' lati ADG è uguale al rettangolo ABG, detrattone il quadrato DB, come dovea dimostrarsi.

COROLLARIO.

Quindi il rettangolo ADG col quadrato DB sarà uguale al rettangolo ABG; ed ADG, meno il quadrato $DE = AEG$.

PROPOSIZIONE XXII.

Essendo inscritto nel cerchio il triangolo equilatero BCA, *da' punti* B, A, C *a qualunque punto* F *della periferia condotte le rette* BF, AF, CF, *i loro quadrati saranno sempre uguali alli due quadrati di* AB, *ed* AC. FIG. 153.

SI tiri il diametro AG, segante il lato BC in E, e si congiungano EF, GF, e si tiri EH perpendicolare ad AF, che sarà parallela a GF, per essere ancora retto l' angolo GFA; onde $FH = \frac{1}{4} FA$, siccome $GE = \frac{1}{4} AG$, perciò due ret-

tan-

tangoli AFH sono uguali al rettangolo di AF, nella sua metà, cioè al quadrato AF diviso pel mezzo; onde essendo il quadrato $AE^2 = AF^2 + EF^2 - 2\,AFH$, sarà perciò $AE^2 = EF^2 + \frac{1}{2} AF^2$; e duplicandolo, sarà $2\,AE^2 = 2\,EF^2 + AF^2$; ed aggiuntivi due quadrati di EB, sarà $2\,EB^2 + 2\,AE^2 = 2\,EF^2 + AF^2 + 2\,EB^2$; ma $2\,EF^2 + 2\,EB^2 = BF^2 + CF^2$ (come si è detto nella parte prima Prop. 23) dunque $2\,EB^2 + 2\,AE^2 = AF^2 + BF^2 + CF^2$; ed è $AB^2 + AC^2 = 2\,AB^2 = 2\,AE^2 + 2\,EB^2$; dunque li tre quadrati $AF^2 + BF^2 + CF^2 = AB^2 + AC^2$; e però a qualunque punto F siano le rette congiunte da' punti A, B, C, fanno sempre li tre quadrati uguali alli quadrati de' lati AB, ed AC; come dovea dimostrarsi.

COROLLARIO.

Quindi ancora il quadrato AF, col doppio quadrato EF, è sempre uguale a' due quadrati AE, dovunque sia il punto F, perchè $2\,AE^2 + 2\,BE^2 = AB^2 + AC^2 = AF^2 + BF^2 + CF^2 = AF^2 + 2\,EF^2 + 2\,BE^2$, dunque $2\,AE^2 = AF^2 + 2\,EF^2$

DISSERTAZIONE

Delle Proporzioni, che si notano nella mia Tavola Analogica.

PResa qualunque angolo BAC, da' termini de' suoi lati BC si tirino le rette BE, CD a qualsivoglia punto del lato opposto, tal quale o rimanga, o sia prodotto l'uno, o l'altro, o ambidue al di sotto, o al di sopra, come si vede in quelle dodici figure, ivi ne rimangono le stesse proporzioni assegnate in essa Tavola, le quali sono sessantasei, per il paragone di esse linee intiere, e loro parti, che sono dodici, cioè (concorrendo esse rette BE, CD in F, non ponendole parallele) riescono AB, AC, BE, CD, AD, DB, BF, EF, AE, CE, CF, DF, di cui ciascuna può essere paragonata a qualunque dell'altre. TAV. X.

Nell' Almagesto di Ptolomeo solamente sei proporzioni si dimostrano delle parti di qualsivoglia retta, o al più delle intiere loro parti, il che da altri Matematici è stato proposto con diciotto proporzioni, e non l'altre, che da me si variano in tante maniere; e solamente da essi fu osservato il caso della figura prima; cioè quando le rette BE, CD concorrano dentro le AC, AB, non prodotte al di sotto, o al di sopra; ma da me in 12 figure diversi altri casi si propongono, e pure ciascuna in qualunque figura ha la medesima proporzione, come sarà da me dimostrato.

Però

Però in quattro maniere si pongono tali proporzioni. La prima si vede nelli sei rombi in mezzo di essa Tavola, in cui si paragonano le rette opposte ad un quadrilatero in qualche figura, cioè AD, EF, *ed* AE, DF *nelle figure* 1, 7, 9, 11; *ed ancora* AB, CF, *ed* AC, BF *nell'altre* 2, 8, 10, 12; *e finalmente* BE, DC, *e* BD, CE *nell'altre figure* 3, 4, 5, 6: *Benchè in altre figure siano esse rette diversamente poste, da per tutto però devono avere le stesse proporzioni, che ivi sono duplicate di un rettangolo ad un altro. Per esempio* AB *a* CF *tanto ha la proporzione di* AD *in* BE *ad* EF *in* CD, *quanto ancora quella di* AE *in* BD *a* DF *in* CE; *e così gli altri hanno pure le due proporzioni, riposte ivi in essa Tavola.*

TAV. XI.

Per dimostrare, che gli corrispondano tali proporzioni, si tiri in tutte le dodici figure la retta AH *parallela a* CF, *e conveniente con* BFE *in* H, *la quale nelle prime sei figure prolungasi fuori, e non nelle sei altre; come ancora conducasi la* FG *parallela ad* AB, *concorrente con* AE *in* G, *la quale non si prolunga nelle figure* 1, 2, 7, 8, 9, 10, *ma bensì nell'altre. Ciò posto, essendo* AB · AH :: BD · DF; *ed* AH · CF :: AE · CE *in ciascuna figura, sarà dunque in tutte* $AB \,|\, CF \,\|\, \frac{AE}{BD} \,\Big|\, \frac{DF}{CE}$; *ed essendo pure* AB · FG :: BE · EF, *ed* FG · CF :: AD · CD, *sarà ancora* $AB \,|\, CF \,\|\, \frac{AD}{BE} \,\Big|\, \frac{EF}{CD}$. *In due maniere dunque si ha la proporzione di* AB *a* CF, *cioè nella prima è come il rettangolo di* AE *in* BD, *al rettangolo*

golo di CE *in* DF, *e nella seconda rimane pure, come il rettangolo di* AD *in* BE *a quello di* EF *in* CD.

Parimente essendo $BF \cdot FH :: BD \cdot AD$, *ed* $FH \cdot AC :: EF \cdot CE$, *sarà pure* $BF \mid AC \parallel \frac{EF}{BD} \mid \frac{AD}{CE}$, *che sarà la sua prima proporzione; ma è ancora* $BF \cdot AG :: BE \cdot AE$, *ed* $AG \cdot AC :: DF \cdot CD$; *dunque la seconda sua proporzione è* $BF \mid AC \parallel \frac{DF}{BE} \mid \frac{AE}{CD}$. *In oltre da queste proporzioni se ne cavano dell' altre, cioè da quella* $AB \mid CF \parallel \frac{AD}{BE} \mid \frac{EF}{CD}$ *sarà pure* $AD \mid EF \parallel \frac{AB}{CD} \mid \frac{CF}{BE}$, *e dalla* $BF \mid AC \parallel \frac{EF}{BD} \mid \frac{AD}{CE}$, *si cava la seconda* $AD \mid EF \parallel \frac{AC}{BD} \mid \frac{BF}{CE}$; *e similmente da* $AB \mid CF \parallel \frac{AD}{BE} \mid \frac{EF}{CD}$ *se ne cava* $BE \mid CD \parallel \frac{AB}{EF} \mid \frac{CF}{AD}$; *ed ancora da* $BF \mid AC \parallel \frac{DF}{BE} \mid \frac{AE}{CD}$ *sarà* $BE \mid CD \parallel \frac{AE}{BF} \mid \frac{DF}{AC}$. *Parimente da* $AB \mid CF \parallel \frac{AE}{BD} \mid \frac{DF}{CE}$ *dovrà essere* $AE \mid DF \parallel \frac{AB}{CE} \mid \frac{CF}{BD}$; *e da* $BF \mid AC \parallel \frac{DF}{BE} \mid \frac{AE}{CD}$, *si ha pure* $AE \mid DF \parallel \frac{AC}{BE} \mid \frac{BF}{CD}$; *ed ancora da* $AB \mid CF \parallel \frac{AE}{BD} \mid \frac{DF}{CE}$ *si cava* $BD \mid CE \parallel \frac{AB}{DF} \mid \frac{CF}{AE}$, *e dalla* $BF \mid AC \parallel \frac{EF}{BD} \mid \frac{AD}{CE}$ *ne riesce* $BD \mid CE \parallel \frac{BF}{AD} \mid \frac{AC}{EF}$; *onde così tutte quelle rette, che in qualche figura si restano opposte ad un quadrilatero, ed in altre*

sono diversamente poste, hanno le due simili proporzioni d' un rettangolo ad un altro, come si vede nelli sei Rombi di mezzo della Tavola Analogica.

La seconda maniera delle proporzioni è di qualunque retta con una delle sue parti, o con un altro lato in qualche triangolo, o d' una parte ad un altra, che insieme si uniscano, le quali saranno 24, *ed averanno una sola proporzione d' un rettangolo ad un altro, e si cavano dalle proporzioni delle sei prime, anzi dalle due sole possono ridursi. Per esempio, essendosi dimostrato, essere* $AB \mid CF \parallel \frac{AE}{BD} \big| \frac{DF}{CE}$ *si può cavarne* $AB \mid BD \parallel \frac{AE}{CF} \big| \frac{DF}{CE}$, *ed* $AB \mid AE \parallel \frac{BD}{CF} \big| \frac{CE}{DF}$, *ed* $AE \mid CE \parallel \frac{AB}{DF} \big| \frac{CF}{BD}$, *e* $CF \mid DF \parallel \frac{CE}{AB} \big| \frac{BD}{AE}$, *e* $CF \mid CE \parallel \frac{DF}{AB} \big| \frac{AE}{BD}$, *e* $BD \mid DF \parallel \frac{AB}{CE} \big| \frac{CF}{AE}$. *Similmente essendo* $AB \mid CF \parallel \frac{AD}{BE} \big| \frac{EF}{CD}$, *se ne cava* $AB \mid BE \parallel \frac{AD}{CF} \big| \frac{EF}{CD}$, *ed* $AB \mid AD \parallel \frac{BE}{CF} \big| \frac{CD}{EF}$, *ed* $AD \mid DC \parallel \frac{AB}{EF} \big| \frac{CF}{BE}$, *e* $CF \mid CD \parallel \frac{EF}{AB} \big| \frac{AD}{BE}$, *e* $CF \mid EF \parallel \frac{CD}{AB} \big| \frac{BE}{AD}$, *e* $BE \mid EF \parallel \frac{AB}{CD} \big| \frac{CF}{AD}$. *Parimente essendo* $BF \mid AC \parallel \frac{EF}{BD} \big| \frac{AD}{CE}$, *sarà* $BF \mid BD \parallel \frac{EF}{AC} \big| \frac{AD}{CE}$, *ed* $EF \mid BF \parallel \frac{CE}{AD} \big| \frac{BD}{AC}$, *ed* $AC \mid CE \parallel \frac{AD}{BF} \big| \frac{EF}{BD}$

ed

ed $AC \mid AD \parallel \frac{CE}{BF} \mid \frac{BD}{EF}$, *ed* $AD \mid BD \parallel \frac{AC}{EF} \mid \frac{BF}{CE}$

ed $EF \mid CE \parallel \frac{BF}{AD} \mid \frac{AC}{BD}$; *ed essendo ancora*

$BF \mid AC \parallel \frac{DF}{BE} \mid \frac{AE}{CD}$, *sarà pure* $BF \mid BE \parallel \frac{DF}{AC} \mid \frac{AE}{CD}$,

e $BF \mid DF \parallel \frac{BE}{AC} \mid \frac{CD}{AE}$, *ed* $AC \mid AE \parallel \frac{CD}{BF} \mid \frac{BE}{DF}$,

ed $AE \mid BE \parallel \frac{AC}{DF} \mid \frac{BF}{CD}$, *ed* $AC \mid CD \parallel \frac{AE}{BF} \mid \frac{DF}{BE}$,

e finalmente $CD \mid DF \parallel \frac{AC}{BE} \mid \frac{BF}{AE}$; *e in tal modo si dimostrano tutti i casi, che si considerano nella seconda maniera.*

Circa poi la terza, si prendono due rette unite ad un angolo, cui non sia sottoposta la base, cioè queste dodici, AB · AC *ed* AB · BF, *e* BF · CF, *ed* AC · CF, *ed* AD · AE, *ed* AE · EF, *ed* EF · DF, *ed* AD · DF, *e* BD · CD, *e* CD · CE, *e* BD · BE, *e* BE · CE, *la di cui proporzione è di tre parti a tre altre, come sarebbe d' un rettangolo ad un altro, e di una ad un altra retta. Queste si trovano dalle doppie proporzioni della prima maniera; imperocchè essendo*

$AB \mid CF \parallel \frac{AE}{BD} \mid \frac{DF}{CE}$, *ed* $\parallel \frac{AD}{BE} \mid \frac{EF}{CD}$, *sarà questa uguale a quella, e però il prodotto de' primi, e degli ultimi sarà uguale al prodotto de' medj, cioè* AE · BD · EF · CD *si uguaglia a* DF · CE · AD · BE; *però deve essere*

$AD \mid AE \parallel \frac{BDC}{EF} \mid \frac{BEC}{DF}$, *e* $BE \mid BD \parallel \frac{AEF}{CD} \mid \frac{ADF}{CE}$,

e $CE \mid CD \parallel \frac{AEF}{BD} \mid \frac{ADF}{BE}$, *e* $DF \mid EF \parallel \frac{BDC}{AE} \mid \frac{BEC}{AD}$,

 Indi

Indi similmente, essendo $BE \mid CD \,\|\, \frac{BF}{AE} \mid \frac{AC}{DF}$, *ed* $\,\|\, \frac{AB}{EF} \mid \frac{CF}{AD}$ *saranno pure uguali i prodotti di quattro in quattro, cioè* $AC \cdot DF \cdot AB \cdot EF = BF \cdot AE \cdot CF \cdot AD$, *onde ne seguono* $AB \mid BF \,\|\, \frac{DAE}{CF} \mid \frac{DFE}{AC}$, *ed* $AE \mid EF \,\|\, \frac{BAC}{DF} \mid \frac{BFC}{AD}$, *ed* $AD \mid DF \,\|\, \frac{BAC}{EF} \mid \frac{BFC}{AE}$, *ed* $AC \mid CF \,\|\, \frac{DAE}{BF} \mid \frac{DFE}{AB}$. *Finalmente, essendo* $AE \mid DF \,\|\, \frac{AB}{CE} \mid \frac{CF}{BD}$, *ed* $\,\|\, \frac{AC}{BE} \mid \frac{BF}{CD}$, *restano uguali* $AB \cdot CE \cdot BF \cdot CD$, *e* $CF \cdot BD \cdot AC \cdot BE$; *onde ne riesce* $AB \mid AC \,\|\, \frac{DBE}{CF} \mid \frac{DCE}{BF}$, *e* $CE \mid BE \,\|\, \frac{ACF}{BD} \mid \frac{ABF}{CD}$, *e* $BF \mid CF \,\|\, \frac{DBE}{AC} \mid \frac{DCE}{AB}$, *e* $BD \mid CD \,\|\, \frac{ABF}{CE} \mid \frac{ACF}{BE}$, *e così riescono tutte le proporzioni di questa terza maniera.*

Ma finalmente la quarta maniera delle proporzioni, che ha più parti da proporsi, cioè un quadrato ad un altro, ed un rettangolo ad un altro, ed una retta ad un' altra, ha pure 24. proporzioni di quelle rette, che non convengono nello stesso punto, ne sono opposte in un rettangolo, ma disparate affatto l' una dall' altra, che tali sono $AB \cdot CD$, *ed* $AB \cdot EF$, *ed* $AB \cdot DF$; *ed* $AB \cdot CE$, *e* $BF \cdot CD$, *e* $BF \cdot AE$, *e* $BF \cdot AD$, *e* $BF \cdot CE$, *e* $AD \cdot CE$, *e* $CE \cdot DF$, *e* $BE \cdot CF$, *e* $BE \cdot AC$, *e* $BE \cdot AD$, *e* $BE \cdot DF$, *e* $DF \cdot AC$, *e* $AD \cdot CF$, *ed* $EF \cdot AC$, *ed* $EF \cdot BD$, *ed* $EF \cdot CD$, *e* $AE \cdot CF$, *e* $AE \cdot BD$, *e* $AE \cdot CD$, *e* $BD \cdot CF$, *e* $AC \cdot BD$; *Ad esse pa-*

ra-

ragonare si possono le loro proporzioni in questa maniera. Tra le due AB, CD *si interpongano* CF, *e* DF, *e si osservi essere* $AB \mid CF \,\Big\|\, \begin{array}{c|c} AE & DF \\ BD & CE, \end{array}$ *e trapposte di quà, e di là* CF . DF, *si osservi ancora essere* $DF \mid CD \,\Big\|\, \begin{array}{c|c} BF & AC \\ AE & BE \end{array}$; *dunque essendo*

$$\begin{array}{c|c} AB & CF \\ CF & FD \\ FD & CD \end{array} \,\Bigg\|\, \begin{array}{c|c} AE & DF \\ BD & CE \\ CF & DF \\ BF & AC \\ AE & BE \end{array} \quad \textit{rimane}\ AB \mid CD \,\Bigg\|\, \begin{array}{c|c} AE^2 & DF^2 \\ DBF & ACE \\ CF & BE; \end{array}$$

onde ancora dovrà essere $BE \mid CF \,\Bigg\|\, \begin{array}{c|c} AE^2 & DF^2 \\ DBF & ACE \\ DC & AB; \end{array}$

ed $AC \mid BD \,\Bigg\|\, \begin{array}{c|c} AE^2 & DF^2 \\ DCF & ABE \\ BF & CE \end{array}$, *e* $CE \mid BF \,\Bigg\|\, \begin{array}{c|c} AE^2 & DF^2 \\ DCF & ABE \\ BD & AC. \end{array}$

E similmente tra le due BF, AE *interposte* AC, *e* CE, *sarà* $BF \mid AC \,\Big\|\, \begin{array}{c|c} EF & AD \\ BD & CE \end{array}$, *e trapposte di quà, e di là* AC . CE, *essendo* $CE \mid AE \,\Big\|\, \begin{array}{c|c} CF & AB \\ BD & DF, \end{array}$

ne risulta pure $BF \mid AE \,\Bigg\|\, \begin{array}{c|c} BD^2 & CE^2 \\ CFE & BAD \\ AC & DF \end{array}$; *onde pure*

$DF \mid AC \,\Bigg\|\, \begin{array}{c|c} BD^2 & CE^2 \\ CFE & BAD \\ AE & BF \end{array}$, *ed* $AB \mid FE \,\Bigg\|\, \begin{array}{c|c} BD^2 & CE^2 \\ CAE & BFD \\ CF & AD, \end{array}$

ed $AD \mid CF \,\Bigg\|\, \begin{array}{c|c} BD^2 & CE^2 \\ CAE & BFD \\ EF & AB \end{array}$. *Poscia tra le due* CE, AB

si frappongano BD, *e* AD, *sarà* $CE \mid BD \parallel \begin{matrix}AC\\EF\end{matrix} \mid \begin{matrix}BF\\AD\end{matrix}$, *e ritenuto di quà, e di là* BD . AD, *ed essendo* $AD \mid AB \parallel \begin{matrix}CD\\EF\end{matrix} \mid \begin{matrix}BE\\CF\end{matrix}$, *riuscirà* $CE \mid AB \parallel \begin{matrix}EF^2\\ACD\\BD\end{matrix} \mid \begin{matrix}AD^2\\EBF\\CF\end{matrix}$, *onde pure* $CF \mid BD \parallel \begin{matrix}EF^2\\ACD\\AB\end{matrix} \mid \begin{matrix}AD^2\\EBF\\CE\end{matrix}$, *e* $BE \mid AC \parallel \begin{matrix}EF^2\\ABD\\CD\end{matrix} \mid \begin{matrix}AD^2\\ECF\\BF\end{matrix}$, *e* $BF \mid CD \parallel \begin{matrix}EF^2\\ABD\\AC\end{matrix} \mid \begin{matrix}AD^2\\ECF\\BE\end{matrix}$.

Parimente tra le due BE, DF *interposti* CD . CF, *sarà* $BE \mid CD \parallel \begin{matrix}AB\\EF\end{matrix} \mid \begin{matrix}CF\\AD\end{matrix}$, *e ritenuto di quà, e di là* CD . CF, *essendo pure* $CF \mid DF \parallel \begin{matrix}CE\\AB\end{matrix} \mid \begin{matrix}BD\\AE\end{matrix}$, *ne riesce* $BE \mid DF \parallel \begin{matrix}AB^2\\CEF\\CD\end{matrix} \mid \begin{matrix}CF^2\\ADB\\AE\end{matrix}$; *ed* $AE \mid CD \parallel \begin{matrix}AB^2\\CEF\\DF\end{matrix} \mid \begin{matrix}CF^2\\ADB\\BE\end{matrix}$, *e* $AD \mid CE \parallel \begin{matrix}AB^2\\CDF\\EF\end{matrix} \mid \begin{matrix}CF^2\\AEB\\BD\end{matrix}$, *e* $BD \mid EF \parallel \begin{matrix}AB^2\\CDF\\CE\end{matrix} \mid \begin{matrix}CF^2\\AEB\\AD\end{matrix}$.

In oltre interposte alle due DF, CE *le rette* AE, AC, *sarà* $DF \mid AE \parallel \begin{matrix}BF\\CD\end{matrix} \mid \begin{matrix}AC\\BE\end{matrix}$; *e ritenuto di quà, e di là* AE . AC, *essendo pure* $AC \mid CE \parallel \begin{matrix}AD\\BF\end{matrix} \mid \begin{matrix}EF\\BD\end{matrix}$ *ne riesce* $DF \mid CE \parallel \begin{matrix}BF^2\\ADC\\AE\end{matrix} \mid \begin{matrix}AC^2\\BEF\\BD\end{matrix}$, *onde* $BD \mid AE \parallel \begin{matrix}BF^2\\ADC\\CE\end{matrix} \mid \begin{matrix}AC^2\\BEF\\DF\end{matrix}$, *ed* $EF \mid CD \parallel \begin{matrix}BF^2\\AEC\\AD\end{matrix} \mid \begin{matrix}AC^2\\BDF\\BE\end{matrix}$, *e* $BE \mid AD \parallel \begin{matrix}BF^2\\AEC\\CD\end{matrix} \mid \begin{matrix}AC^2\\BDF\\EF\end{matrix}$,

Finalmente tra AD, *e* BF *interposti* EF, BE, *sarà pure* $AD|EF \,\|\, \begin{array}{c|c} AC & BF \\ BD & CE \end{array}$, *e ritenuto di quà, e di là* EF · BE, *essendo poi* $BE|BF \,\|\, \begin{array}{c|c} AE & DF \\ CD & AC \end{array}$, *ne risulta* $AD|BF \,\|\, \begin{array}{c|c} CD^2 & BE^2 \\ BAE & CFD \\ EF & AC \end{array}$; *onde* $AC|EF \,\|\, \begin{array}{c|c} CD^2 & BE^2 \\ BAE & CFD \\ BF & AD \end{array}$, *e* $CF|AE \,\|\, \begin{array}{c|c} CD^2 & BE^2 \\ BFB & CAD \\ AB & DF \end{array}$, *e* $DF|AB \,\|\, \begin{array}{c|c} CD^2 & BE^2 \\ BFE & CAD \\ AE & CF \end{array}$; *onde tutte sono dimostrate, e ben disposte nella Tavola Analogica, in cui può osservarsi, come si corrispondono i quadrilateri dal mezzo ugualmente lontani, con molte parti uguali; e l' ultime corrispondenti alle opposte rette, cui corrispondono l' altre proporzioni.*

Può ancora osservarsi, che in queste figure, se vi fossero due rette, o due parti uguali, le altre, che siano proporzionali con esse, averanno proporzione meno composta. Per esempio, se fosse BD = CE, *sarebbero* AE *in* CF = DF *in* AB, *ed* EF *in* AC = AD *in* BF, *onde* AB · AE :: CF · DF, *ed* AC · AD :: BF · EF, *ed* $AE|AE \,\|\, \begin{array}{c|c} DC & BE \\ EF & DF \end{array}$, *ed* $AE|CD \,\|\, \begin{array}{c|c} AB^2 & CF^2 \\ DFE & AD \times BE \end{array}$, *e così troverassi in molte altre proporzioni. Così ancora se fosse* AB = AC, *sarebbe* $BF|CF \,\|\, DBE|DCE$, *e* $BF|AE \,\|\, \begin{array}{c|c} BE^2 & CD^2 \\ CFE & ADF \end{array}$ *e* $BF|AD \,\|\, \begin{array}{c|c} BE^2 & CD^2 \\ CFD & AEF \end{array}$ *ec. Il che potrà ricavarsi da altre parti, cavandone proporzioni più semplici di quelle poste in essa Tavola Analogica.*

Finalmente si può dimostrare nell' altre dodici figure, cioè dalle 13. *alle* 24., *che tirata la retta* BC, *e la retta* DE, *e la retta* AF, *le quali (se non riuscissero parallele) converranno insieme; cioè* AF *con* BC *in* G, *e con* DE *in* H, *ed ancora* BC *con* DE *in* I, *onde armonicamente disposte riesciranno, cioè* BG . GC :: BI . IC, *e parimente* DH . HE :: DI . IE, *ed* AH . HF :: AG . GF, *essendo ancora proporzionali i triangoli* DAE . DFE :: BAC . BFC, *ed altri, di cui parleremo; e può ciò dimostrarsi colle proporzioni della terza maniera, poste nella medesima Tavola Analogica: cioè essendo* AC | CF ‖ DAE/BF | DFE/AB, *sarà il prodotto delle quattro rette* DF . FE . AB . AC *uguale a quello dell' altre quattro* DA . AE . BF . CF; *dunque li rettangoli* BAC . DAE :: BFC; *ed avendo li triangoli* BAC, *e* DAE *il medesimo angolo, riescono proporzionali ad essi rettangoli, e così pure li triangoli* BFC, *e* DFE *avendo uguali angoli in* F, *sono parimente proporzionali a' medesimi rettangoli; onde li triangoli* BAC . DAE :: BFC . DFE, *e permutando* BAC . BFC :: DAE . DFE; *ma* BAC *a* BFC, *avendo la stessa base* BC, *sono come l' altezze loro* AG, *e* GF; *ed ancora* DAE, *e* DFE, *sopra la stessa base* DE, *sono come le loro altezze* AH, *ed* HF; *dunque sono proporzionali* AG . GF :: AH . HF, *ed* AG . AH :: GF . HF; *sicchè armonicamente è divisa* AG *in* H, F *in qualsivoglia delle dette figure.*

Così pure essendo BA | AC ‖ DBE/CF | DCE/BF, *sarà*

pure

pure DCE *in* ABF *uguale a* DBE *in* ACF, *onde sono proporzionali i rettangoli, ed ancora i triangoli composti da* DBE . ABF :: DCE . ACF; *e permutando, saranno pure i triangoli* DBE . DCE :: ABF . ACF; *ma tirata sopra* DE *la* CK *parallela a* BD, *sarà* DBE *a* DCE, *come la retta* BD *alla* CK, *avendo ambidue la stessa base* DE, *e l' altezze proporzionali alle rette* BD, CK *parallele*; *ma* BD . CK :: BI . IC; *ed ancora* ABF *ad* ACF *è come* BG *a* GC, *sopra la stessa base* AF *de' medesimi triangoli*; *dunque siccome tali triangoli sono proporzionali, parimente* BI . IC :: BG . GC, *e* BI . BG :: IC . GC, *sicchè essa* BI *è disposta armonicamente in* C, *e* G, *in qualunque figura*.

Essendo ancora DA | AE ‖ $\frac{BDC}{EF}$ | $\frac{BEC}{DF}$, *ne riesce pure* BEC *in* ADF, *uguale a* BDC *in* AEF, *onde* BDC . ADF :: BEC . AEF, *tanto i rettangoli, quanto i triangoli, di cui permutando sarà pure* BDC . BEC :: ADF . AEF; *ed avendo i due primi la stessa base* BC, *sono come le loro altezze, onde tirata* EL *parallela a* DB, *sarà* BDC . BEC :: DB . EL, *cioè come* DI *ad* IE; *e gli altri due triangoli avendo la stessa base* AF, *e l'altezze proporzionali alle rette* DH . HE, *saranno pure* ADF . AEF :: DH . HE; *e perciò armonicamente si trova* DI . IE :: DH . HE, *e* DI . DH :: IE . HE, *in qualsivoglia figura*.

E tanto basti di avere dimostrato in questa Dissertazione, benchè molte altre cose potevansi ricavare; e principalmente può osservarsi, che se le

rette B E, C D *perpendicolarmente fossero tirate a i lati opposti* A C, A B, *riuscendo simili tutti li triangoli rettangoli* B A E, C A D, B D F, C E F, *la proporzione di qualunque retta ad un altra, riesce o tripla d' una parte ad un altra parte, o dupla almeno di esse, o ancora dupla d' un rettangolo ad un altro, come può vedersi in quest' altra Tavola delle rette perpendicolari a' lati, ove ne riescono quattro figure diverse. In fatti, prendendo i lati di alcuno Triangolo, ne averanno tre proporzioni di una linea ad un altra, per esempio* A B *a* B E, *sarà come* A C *a* C D, *ed ancora come* B F *a* B D, *ed altresì come* C F *a* C E; *e così pure* A B *ad* A E, *sarà come* A C *ad* A D, *e come* B F *a* D F, *e finalmente come* C F *ad* E F; *e simili proporzioni ne averanno gli altri: per esempio sarebbe* A C *a* C D *in ragione di* A B *a* B E, *e di* B F *a* B D, *e di* C F *a* C E *&c. onde se ne veggono dodici in essa Tavola delle rette perpendicolari al suo angolo.*

Da queste medesime se ne cavano diciotto proporzioni duple d' una retta ad un altra. Cioè essendo A B *a* B E, *come* A C, *e* C D, *permutando, sarà* A B *ad* A C, *come* B E *a* C D; *ed essendo pure* A B *ad* A E, *come* A C *ad* A D, *sarà ancora* A B *ad* A C, *come* A E *alla* A D, *onde vi è a questi* A B · A C :: B E · C D :: A E · A D, *che sono due simili proporzioni, e così dalle prime proporzioni terze de' lati a qualche triangolo rettangolo, se ne trovano quest' altre duple proporzioni dell' altre rette, che si vedranno appartenenti in essa medesima Tavola.*

Poscia le altre trentasei proporzioni hanno due ma-

maniere d' un rettangolo ad un altro; rimanendosi però alcune rette della prima maniera, e quelle della seconda. Cioè sarebbe AE *a* CD *in ragione di* AE *a* BE, *e di* BE *a* CD, *ed essendo* AE *a* BE *in ragione di* DF *a* BD, *ed ancora di* BF *a* CE (*non prendendo l'altra di* AD *a* CD, *per avere in se il* CD) *ed il* BE *a* CD, *essendo come* AB *ad* AC (*lasciando l'altra di* AE *ad* AD, *per avere in se quella* AE) *perciò la* AE *a* CD, *sarà in ragione di* AB *ad* AC, *e di* DF *a* BD, *ed ancora in ragione di esse* AB *ad* AC, *e di* EF *a* CE; *dunque due proporzioni si averanno*
$AE \mid CD \parallel \frac{AB}{DF} \mid \frac{AC}{BD} \parallel \frac{AB}{EF} \mid \frac{AC}{CE}$; *e così le altre parimente si troveranno, come potrà vedersi in essa Tavola, in cui tutte le due proporzioni d'un rettangolo ad un altro ci si mantengono in ambidue le due medesime rette, come* $BE \mid CF \parallel \frac{AE}{CD} \mid \frac{EF}{AC} \parallel \frac{AE}{BD} \mid \frac{EF}{BF}$; *e così pure* $AD \mid CE \parallel \frac{AC}{AF} \mid \frac{CF}{BE} \parallel \frac{AC}{DF} \mid \frac{CF}{BD}$; *e così nel medesimo modo troveransi le altre; Laddove, se le rette* BE, CD *non fossero a' lati dell' angolo* AC, AB *perpendicolari, le proporzioni nell' altra Tavola Analogica sono di più rette composte: per esempio*
$AE \mid CD \parallel \begin{array}{c} AB^2 \\ CEF \\ DF \end{array} \mid \begin{array}{c} CF^2 \\ ADB \\ BE \end{array}$, *e* $BE \mid CF \parallel \begin{array}{c} AE^2 \\ DBF \\ CD \end{array} \mid \begin{array}{c} DF^2 \\ ACE \\ AB \end{array}$,
ed ancora $AD \mid CE \parallel \begin{array}{c} AB^2 \\ CDF \\ EF \end{array} \mid \begin{array}{c} CF^2 \\ AEB \\ BD \end{array}$; *e così negli altri della quarta maniera ivi posta, e quelli ancora della maniera terza, che hanno la proporzione di*

tre

tre rette a tre altre, come AE | AD *ivi* ‖ CEB/DF | BDC/EF, *in quest' altra Tavola* AE · AD :: AB · AC :: BE · CD; *e però l'essere tali rette perpendicolari a i lati dell' angolo, ne riescono con maggiori numeri di proporzioni più piccole. E tanto basti.*

INSTITUZIONI GEOMETRICHE

PARTE TERZA.

DEFINIZIONI.

I. DIcesi la retta *AB* perpendicolare al piano *CDE*, quando fa angoli retti con tutte le linee *KL*, *GF*, *HI*, &c. condotte in detto piano pel medesimo punto *B*, in cui cade essa *AB* perpendicolare. TAV.XII. FIG. 154.

II. La retta *AF* dicesi inclinata allo stesso piano *CDE* secondo l'angolo acuto *AFB*, che contiene con la retta *BF* tiratagli dal punto *B*, in cui dal medesimo punto *A* cade la *AB* perpendicolare allo stesso piano. FIG. 155.

III. Il piano *EGHI* dicesi perpendicolare al piano *CDE*, se le rette *EG*, *AB*, *IH* perpendicolari alla comune sezione *HG* di questi piani, sono ancora al soggetto piano *CDE* perpendicolari. FIG. 156.

IV. Ma l'altro piano *EKLI* è inclinato al piano *CDE* secondo l'angolo acuto *AFB*, compreso dalle rette *AF*, *FB* perpendicolari alla comune sezione *KL*, quella in un piano, e questa in un altro.

V. I piani sono tra loro paralleli, se prolungati in infinito, verso qualunque parte, mai convengono insieme.

FIG. 157. VI. Angolo solido si dice quello, che resta contenuto da più linee *AD*, *AC*, *AB*, tirate dallo stesso punto *A*; ma non poste nel medesimo piano.

FIG. 158. VII. Dicesi *Piramide* quel solido, che da qualunque base, o triangolare *BDC*, o quadrangolare *BDCE*, o pentagona *BDCFE*, o di qualunque altro poligono, ha le rette congiunte da' termini de' lati della base, ad un sublime punto *A*, ove fa l' angolo solido, che è il vertice di tale Piramide, la quale dicesi triangolare, se ha per base il triangolo, ovvero quadrangolare, se ha la base di quattro lati, o poligona, se ha la base di più lati.

FIG. 159. VIII. Se poi la base fosse un cerchio *BDEF*, e dal punto sublime *A* si vedessero tirate le rette per tutti i punti della circonferenza, questo solido si dirà *Cono*, di cui l' asse è la retta *AC*, dal vertice *A* al centro della base circolare condotta.

FIG. 160. IX. Il solido contenuto da due figure simili, ed uguali in piani paralleli, riuscendo gli altri piani laterali parallelogrammi, si dice *Prisma*; come *ABDCEF* ha i piani paralleli simili, ed uguali *BAF*, *DCE*, ed i parallelogrammi *BACD*, *BDEF*, *ACEF*; e così ancora, se i piani paralleli fossero altri poligoni, tanto ciò sarebbe un Prisma.

FIG. 161. X. E se le basi parallele sieno cerchj uguali *BDE*, *HGF*, si dirà questo solido un *Cilindro*, il di cui asse è la retta *AC*, che congiunge i centri delle basi.

FIG. 162. XI. Ma essendo ancora tali basi parallelogrammi

mi *ABCD*, *EFGH*, tale ſolido ſuol dirſi *Parallelepipedo*.

XII. *Sfera* diceſi il corpo generato dalla rivoluzione d' un ſemicircolo girato intorno al ſuo diametro, la di cui ſuperficie è fatta da quella ſemiperiferia: Il centro di eſſa sfera è il medeſimo, che quello del ſemicircolo generatore, e l' aſſe è il ſuo diametro fiſſo.

XIII. Se varj ſolidi compreſi da ſimili, ed uguali figure piane, foſſero nella sfera inſcritte, ſi direbbero *Corpi regolari*.

XIV. Le figure ſolide ſimili ſono quelle, che da figure piane ſimili ſi trovano compreſe, con ugual numero di angoli ſolidi, ciaſcuno uguale al ſuo corriſpondente.

XV. Simili ancora ſi dicono i coni, ed i cilindri, le di cui baſi circolari hanno i diametri proporzionali agli aſſi ugualmente inclinati al piano delle loro baſi.

SCOLIO.

LE rette, che convengono inſieme, ſono certamente in un medeſimo piano; e la retta, che ſega due parallele, ſta ſimilmente nel piano di eſſe; ne può eſſere una retta, parte in un piano, e parte in un altro al di ſopra: Quando però ſi ſegano due piani, la loro comune ſezione è una linea retta, che tanto nell' uno, che nell' altro piano è contenuta; anzi per una medeſima retta linea poſſono paſſare più Piani.

PROPOSIZIONE I.

Se la retta AD *è perpendicolare ſopra due rette* FIG. 163.

te DB, DC *del piano ſottopoſtogli, ſarà ancora perpendicolare a qualunque altra linea* DE *di eſſo piano, onde ſarà perpendicolare al piano medeſimo.*

SI taglino uguali le rette *DB*, *DC*, e congiunta la *CB*, che concorra con l' altra linea *DE* in *E*, ſi conducano da un punto *A* di eſſa linea *AD* le rette *AB*, *AC*, *AE*; ſarà il triangolo *BDC* iſoſcele, ed ancora il triangolo *ABC*, perchè le rette *AB*, *AC* ſono uguali, eſſendo i loro quadrati uguali al quadrato di *AD*, ed al quadrato di *BD*, o della uguale *CD*, per eſſer retti ambidue gli angoli *ADB*, *ADC*; dunque per il Coroll. 5. della Prop. 19. della prima parte, il quadrato *AB* è uguale al quadrato *AE* col rettangolo *BEC*; ed è ancora uguale a' quadrati *AD*, e *BD*, de' quali ancora il quadrato *BD* è uguale al quadrato *DE* col rettangolo *BEC*; dunque il quadrato *AE* col rettangolo *BEC* è uguale a' quadrati *AD*, *DE* col medeſimo rettangolo *BEC*; e però tolto queſto di quà, e di là, rimane il quadrato *AE* uguale a' quadrati *AD*, e *DE*; onde biſogna, che ancora l' angolo *ADE* ſia retto. Il che doveaſi dimoſtrare.

COROLLARJ.

I. Quindi volendo ereggere uno ſtilo perpendicolare all' orizzonte, o al muro, o a qualche altro piano, baſta che ſi accomodi con due rette in quel piano tirate ad angolo retto, con qualche norma, e riuſcirà perfettamente ad eſſo piano perpendicolare.

II.

II. Essendo la retta AB perpendicolare a tre rette BC, BD, BE, queste saranno in un medesimo piano; altrimenti, se CB fosse fuori del piano EBD, sarebbe ABC un piano, ed EBD un altro, li quali converrebbero in una comune retta BF; onde AB sarebbe pure perpendicolare a BF, siccome all' altre due BD, BE; e nell' altro piano l' angolo ABF retto, e però uguale al retto ABC, che è una sua parte, il che è impossibile. FIG. 164.

III. Se nel piano CDB, cui è perpendicolare la AD, si tiri dal punto D la DC perpendicolare a BD, sarà quella perpendicolare al piano ADB, facendo angolo retto con le due AD, e DB. FIG. 165.

PROPOSIZIONE II.

Le due rette AB, CD *perpendicolari al piano* BDE *sono tra di loro parallele, ed in un medesimo piano.* FIG. 166.

IMperocchè, congiunta la retta BD, e fattagli perpendicolare la DE posta uguale ad AB, e congiunte le rette AD, AE, BE, sarà $AD = BE$, essendo gli angoli ABD, EBD retti, con lati uguali, che gli comprendono, cioè $AB = DE$, e BD comune, e però le basi di tali triangoli ABD, BDE sono uguali; dunque ancora saranno li triangoli ABE, EDA uguali, avendo il lato AE comune, con gli uguali lati $AB = DE$, ed $AD = BE$; però ancora l' angolo retto $ABE = ADE$; dunque facendo la ED angolo retto con le tre linee BD, DA, e DC, esse linee so-

no nel medesimo piano, e però sono AB, DC parallele, avendo gli angoli interni ABD, CDB nel medesimo piano $CDBA$ uguali a due retti. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Vicendevolmente, se due rette CD, AB sono parallele, ed una di loro è perpendicolare al piano BDE, ancora l'altra vi sarà perpendicolare; perchè essendogli perpendicolare AB, fatta $DE = AB$, posta ancor essa ad angolo retto alla BD, si è veduto, che sarà ancora EDA angolo retto, e la DE perpendicolare al piano ADB, in cui è la stessa CD parallela ad AB, onde ancora l'angolo EDC sarà retto, ed è pur retto CDB, come è retto ABD, avendosi gli angoli interni delle linee parallele uguali a due retti; dunque CD facendo angolo retto, e con DE, e con DB, è perpendicolare ancor essa al piano BDE.

FIG. 167. II. Non possono dal punto medesimo A nel piano CDE, o superiore ad esso piano, tirarsi due linee AB, AF, ambidue perpendicolari al piano stesso, dovendo essere parallele codeste perpendicolari, e però non convenienti in un punto A.

FIG. 168. III. Se due piani FG, IH sono amendue perpendicolari al sottoposto CDE, intersegandosi nella retta AB, sarà questa perpendicolare al medesimo piano CDE; altrimenti se dal punto B nel piano IH si tirasse la BK perpendicolare alla retta BH, e nel piano FG la BL perpendicolare alla BG, sarebbero queste due BK, e BL per-

perpendicolari al sottoposto piano *CDE*; il che è impossibile; dunque la *BA* solamente gli è dal punto *B* perpendicolare.

IV. Così pure si ha, che facendosi passare per qualunque retta *AB* perpendicolare al soggetto piano *CDE*, qualsisia piano *IH*, ovvero *FG*, riuscirà parimente esso piano perpendicolare al sottoposto.

V. Dal punto sublime *A* si può tirare la retta *AB* perpendicolare al soggetto piano *CDE* in questa maniera: Si tiri in esso piano qualunque retta *GE*, sopra di cui dal punto *A*, nel piano, che riesce *AGE*, si tiri la perpendicolare *AI*, e dal punto *I* tirata alla retta *GE* nel piano *CDE* la perpendicolare *IB*, sopra di essa si mandi dal punto *A* nel piano *AIB* la perpendicolare *AB*; sarà questa al piano *CDE* perpendicolare, perchè avendo la *EI* angolo retto con *AI*, e con *IB*, essa è perpendicolare al piano *AIB*, onde tirando la *BF* parallela ad *IE*, ancor questa *BF* sarà perpendicolare allo stesso piano *AIB*; onde saranno angoli retti *ABF*, ed *ABI*, e perciò la *AB* deve essere perpendicolare al piano *CDE*. FIG. 169.

VI. Quindi se da un punto *F* si vuole alzare la perpendicolare al piano *CDE*, da un punto sublime *A* tiratagli la perpendicolare *AB*, congiunta *BF*, e nel piano *ABF* tirata la *FG* parallela ad *AB*, sarà pure essa *GF* al piano *CDE* perpendicolare. FIG. 170.

PROPOSIZIONE III.

Le rette AB, EF *essendo ad una terza* CD FIG. 171.

parallele, non posta nello stesso piano di quelle, saranno esse AB, EF *parallele pure tra loro*.

IMperocchè nel piano delle due *AB*, *CD* tirata la *CA* perpendicolare a *CD*, e nel piano *DCEF* tirata la CE parimente perpendicolare alla stessa *CD*, riuscirà *CD* perpendicolare al piano *ACE*, dunque ancora *AB*, e *DF* al medesimo piano saranno perpendicolari, e conseguentemente parallele tra loro, facendo angoli retti con la stessa linea *AE*. Il che &c.

COROLLARJ.

FIG. 172. I. Se per due linee parallele *EF*, *CD* passano due piani, concorrenti nella retta *AB*, questa pure sarà parallela a ciascuna di esse; altrimenti se per il punto *B* si tirasse nel piano *AD*, e nel piano *AF* le rette *BG*, *BH* parallele, quella à *CD*, e questa ad *EF*, sarebbero esse tra loro parallele, ma in un punto *B* convenienti; il che è assurdo; dunque la *AB* dovrà essere parallela ad esse *CD*, *EF*, e non verun altra tirata in essi piani dal punto *B*.

TAV. XIII. FIG. 173. II. Se tra due piani *CH*, *ED* l'istessa retta *AB* è perpendicolare ad ambidue, saranno essi tra di loro paralleli; altrimenti se potessero insieme convenire in una retta *CD*, da qualunque punto *I* di essa condotte le rette *IA*, *IB*, ne riuscirebbe il triangolo *IAB*, che averebbe in *A*, ed in *B* due angoli retti; il che è impossibile; dunque &c.

FIG. 174. III. Vicendevolmente, se i due piani *CH*, *ED* sono paralleli, la retta *AB* perpendicolare al primo

mo, sarà pure al secondo perpendicolare; perchè condottagli la retta AG, con cui fa l'angolo retto BAG, il piano GAB segherà l'altro ED nella retta BF, la quale sarà pure parallela ad AG, onde ancora l'angolo ABF sarà retto; e per un altra retta CA tirato il piano CAB, concorrente con l'altro ED in BE, sarà pure l'angolo ABE retto, essendo ancora BE parallela ad AC; dunque la AB, che era perpendicolare al piano CH, è perpendicolare ancora all'altro ED.

IV. Essendo poi due rette AB, AF, convenienti nel punto A parallele alle CD, CE convenienti in C in un altro piano, i loro angoli BAF, DCE saranno uguali, ed ancora i piani loro paralleli; perchè tagliata $AB = CD$, ed $AF = CE$, congiunte le rette AC, FE, BD saranno parallele, ed uguali, dunque ancora tirate le BF, DE sono uguali, e parallele, però i triangoli BAF, DCE sono simili, ed uguali, onde l'angolo $BAF = DCE$; ed il piano BAF è parallelo a DCE, avendosi tra loro le rette AC, BD, FE parallele, ed uguali, ed il solido $AFBDEC$ è un prisma. FIG. 175.

PROPOSIZIONE IV.

L'angolo solido A, *compreso da tre angoli piani*, BAC, BAD, CAD, *ne averà sempre due di essi maggiori del terzo.* FIG. 176.

SE tutti tre fossero uguali, è certo, che due di essi dovranno sempre essere maggiori del rimanente; se poi ne sia uno maggiore di un altro, come $BAC > BAD$, si faccia l'angolo $BAE = BAD$, e prese le rette uguali $AD = AE$,

si

si congiungano le rette BD, e BE, e questa convenga con AC in C, e si congiunga CD. Essendo nel triangolo BDC, $BD + DC > BC$, e $BD = BE$, sarà $DC > CE$, dunque essendo i lati AD, AE uguali, ed AC comune alli triangoli DAC, CAE, dovrà essere l'angolo DAC maggiore di CAE; dunque essendo $BAD = BAE$, sono li due $BAD + DAC$ maggiori dell' angolo BAC. Il che ec.

COROLLARJ.

FIG. 177. I. In ogni piramide, la di cui base sia, o un triangolo, o qualunque poligono $BDEFG$, gli angoli, che sono sopra la base, saranno maggiori degli angoli di esso poligono, cioè $ABD + ADE > BDE$, e parimente $ADE + AEF > DEF$, e così degli altri.

II. Preso nel piano della base qualunque punto C, ed indi tirate le rette agli angoli di essa, cioè CB, CD, CE, CF, CG, saranno tanti questi angoli de' triangoli descritti nella base, quanti sono gli angoli de' triangoli ABD, ADE, AEF, AFG, AGB dal vertice A della piramide inclinati ad essa base, essendo tanti questi triangoli, che quelli; dunque essendo maggiori gli angoli di questi triangoli verso la base, che gli angoli del poligono, gli altri angoli verso il vertice A dovranno essere minori degli angoli al vertice C di quei triangoli descritti sopra la base; dunque tutti gli angoli, che compongono un solido, sempre sono minori di quattro retti, essendo detti angoli raccolti in C uguali appunto a quattro retti.

FIG. 178. III. Avendo pure tre angoli HEG, GEF, FEL

mi-

minori di quattro retti, di cui due ſiano maggiori del rimanente, ſi può farne di tali angoli un angolo ſolido in queſta maniera: Diviſe ugualmente le rette EH, EG, EF, EL, e condotte le linee HG, GF, FL, di eſſe facciaſi un triangolo CBD. (il che può farſi, eſſendo due di tali linee maggiori dell'altra) perchè condotta ancora la FH, ſono pure le due HG, GF maggiori di FH; ma eſſendo li due angoli $HEG + GEF$ maggiori dell' angolo FEL, la baſe $FH > FL$, dunque $FG + GH > FL$) e circoſcritto un cerchio al detto triangolo CBD, dal di cui centro O ſi tirino i raggi OB, OC, OD, queſti ſaranno minori delle rette EH, EG, EF, perchè ſe gli foſſero uguali, avendo le ſteſſe baſi, ſarebbero gli angoli HEG, GEF, FEL uguali agli angoli BOD, DOC, COB, li quali ſono uguali a quattro retti; e ſe detti raggi foſſero maggiori di quei lati EH &c. averebbero in O gli angoli minori di quelli fatti in E, per eſſere il vertice O più lontano dalle baſi, che il vertice E; onde gli angoli propoſti in E ſarebbero maggiori de' quattro retti, compreſi in O. Eſſendo adunque OB minore di EH, ſi alzi dal punto O la retta OA perpendicolare al piano BCD, la quale porta un quadrato uguale all' ecceſſo del quadrato EH ſopra il quadrato OB; ed indi congiunte le rette AB, AD, AC, ſaranno tutte a' dati lati EH, EG &c. uguali, eſſendo il loro quadrato uguale alla ſomma del quadrato AO, e del quadrato del raggio OB, ovvero OD, o pure OC; onde ſono tali rette uguali a' detti lati, e le baſi parimente uguali; dunque gli angoli BAD, DAC, CAB uguagliano li tre

proposti HEG, GEF, FEL; e però ne riesce l' angolo solido in A, compreso dalli tre angoli dati.

PROPOSIZIONE V.

FIG. 179. *Le rette* AB, DC, *che segano i piani paralleli* PKQ, NGO, LIM, *sono da essi proporzionalmente divise.*

Congiungasi la retta AC, e congiunte le rette AD, EF, EH, CB (supponendo, che DC seghi il piano di mezzo NGO in F, ed AB lo seghi in H,) sarà pure AD parallela ad EF, e BC parallela ad EH, segandosi i piani paralleil dal piano del triangolo DCA, e da quello dell' altro triangolo ABC; dunque DA ad FE è come $DC \cdot CF :: AC \cdot CE$; ed ancora BC ad HE, come $CA \cdot AE :: BA \cdot AH$, e per conversione di ragione sarà pure $AC \cdot CE :: AB \cdot BH$; dunque $DC \cdot CF :: AB \cdot BH$. Il che &c.

COROLLARJ.

FIG. 180. I. Nelle Piramidi, segandosi col piano $HIFG$ parallelo alla base $BEDC$ (o sia essa base triangolare, o quadrilatera, o poligona) sarà la figura di tale sezione simile ad essa base; imperocchè i lati AB, AE, AD, AC, da essi piani paralleli sono divisi proporzionalmente, $BA \cdot AH :: EA \cdot AI :: DA \cdot AF :: CA \cdot AG$; dunque ancora sono proporzionali $BE \cdot HI :: ED \cdot IF :: DC \cdot FG :: CB \cdot GH$; e gli angoli pure BED, HIF sono uguali (pel Corollar. 4. della Propos. 3.) e così gli altri corrispondenti; dunque la sezione $HIFG$ è simile alla base $BEDC$. II.

II. Così pure ne' prismi, e ne' parallelepipedi sono simili le sezioni parallele alla base, ma uguali ancora ad essa, avendo uguali i lati, che riescono opposti ne' parallelogrammi comprendenti il prisma, ed il parallelepipedo.

III. Ancora i Coni, ed i Cilindri hanno le sezioni, parallele alla loro base circolare, simili ad essa, le quali ne' cilindri sono ancora uguali, avendo essi circoli uguali diametri.

PROPOSIZIONE VI.

Il Prisma triangolare ABCFDE *si divide in tre piramidi uguali.* FIG. 181

SI tirino le linee *BD*, *BF*, *CD*. La piramide *ABDC* sarà uguale alla *BCDF*, avendo le basi uguali *ADC*, *CDF*, e l' istessa altezza al suo vertice comune *B*; ma ancora *BCDF* è uguale all' altra *BEDF*, avendo le basi uguali *BCF*, *BEF* colla stessa altezza al loro comune vertice *D*; dunque è diviso il prisma in tre piramidi uguali.

COROLLARJ.

I. Qualsivoglia altro Prisma, o ancora parallelepipedo, sarà triplo della piramide fatta sopra la stessa base, e la medesima altezza. Perchè la base poligona può dividersi in alquanti triangoli, e così il prisma in altrettanti prismi triangolari; ed ancora la piramide, fatta sopra essa base, si divide in altrettante piramidi triangolari, che sono il terzo del prisma triangolare, eretto sopra lo stesso triangolo, alla medesima altezza: FIG. 182.

Per

Per esempio la piramide *AHEG* è la terza parte del prisma *ACBEHG*; e così ancora la piramide *AGEF* è il terzo del prisma *BCIFEG*; e così degli altri; dunque la piramide *AGHEDF* è un terzo del prisma *ACIKBEHGFD*.

FIG. 183. II. Parimente il Cono sarà un terzo appunto del cilindro ugualmente alto sopra la medesima base circolare, perchè il prisma, e la piramide avendo per base un poligono regolare iscritto in un cerchio *EHDF*, moltiplicando in infinito i loro lati, degenera il poligono in un cerchio, onde il prisma riesce un cilindro, e la piramide un cono, e però mantenendosi sempre il prisma triplo della piramide sopra la medesima base, e nell' istessa altezza, ancora essendo ridotto il prisma in un cilindro, e la piramide in un cono, quello riesce triplo di questo.

FIG. 184.

PROPOSIZIONE VII.

I prismi ugualmente alti AE, HO, *sono come le loro basi* DFE, QMNPO, *e così ancora le Piramidi in essi inscritte.*

IMperocchè moltiplicando in qualche maniera la base *DFE*, ed alzandovi alla medesima altezza i lati paralleli ad *AD*, *CF*, *BE*, altrettanto moltiplice riuscirà questo prisma del prisma *AE*, come è moltiplice la base di quello della base *DFE*, essendo ogni prisma di ugual base, e con la medesima altezza, uguale ad ogni altro: E similmente moltiplicando l' altra base *QMNOP* in qualunque altra maniera, ed erette le linee alla medesima altezza, si farà pure un

un prisma ugualmente moltiplice di HO, come la sua base è fatta moltiplice di questa. Che se la moltiplice base del primo sarà uguale alla base moltiplice del secondo, ancora i prismi, o le piramidi moltiplicate saranno uguali; ma se la moltiplice base dell' uno fosse maggiore, o minore della moltiplice base dell' altro, ancora maggiore, o minore sarebbe il prisma di quello, del prisma di quest' altro, ed ancora la piramide dell' uno, maggiore, o minore sarebbe di quella dell' altro; dunque tanto i prismi, quanto le piramidi ugualmente alte sono proporzionali alle loro basi, mentre le basi, ed i prismi, o le piramidi ugualmente moltiplici del primo, si accordano in uguagliare, superare, o mancare da altre ugualmente moltiplici della base, e del prisma, o piramide, secondariamente fatte. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Ancora i cilindri, ed i coni ugualmente alti, sono come le loro basi, perchè se i circoli fossero doppj, o tripli &c. di esse basi, ancora i cilindri, ed i conj sarebbero ugualmente moltiplici di esse basi, onde ne segue l' istesso.

II. Se i prismi, o i cilindri avessero basi uguali, ma diverse altezze, sarebbero pure alle dette altezze proporzionali, perchè moltiplicata l' altezza di essi, ne riuscirebbero prismi, e cilindri ugualmente moltiplicati, li quali sarebbero uguali, o disuguali, secondo che le loro altezze moltiplicate fossero uguali, o pure una maggiore dell' altra.

III. Ancora le piramidi, ed i coni di uguale base, saranno come le loro altezze, essendo il triplo de' prismi fatti sopra la stessa base, ed alla medesima altezza,

PROPOSIZIONE VIII.

I Prismi DC, GN *sono in ragione composta di quella delle basi, e di quella delle loro altezze, e così ancora le piramidi, i cilindri, ed i coni sono in ragione composta delle basi, e delle altezze.*

FIG. 185. IMperocchè si faccia un prisma *PV*, la di cui base *TSV* sia uguale alla base *ABC* del prisma *DC*, e l' altezza *PS* sia uguale all' altezza *GL* dell' altro prisma *GN*, sarà *DC* a *GN* in ragione composta di *DC* a *PV*, e di *PV* a *GN*; ma *DC* a *PV* è in ragione dell' altezze, avendo le basi uguali, e *PV* a *GN* è in ragione delle basi, essendo ugualmente alti; dunque *DC* a *GN* è in ragione composta delle altezze, e delle basi loro; onde ancora le piramidi fatte sulle stesse basi, ed altezze de' Prismi, di cui sono il terzo, ed i cilindri, ed i coni similmente dovranno essere in ragione composta delle loro basi, e delle loro altezze. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Se però ne' prismi, o nelle piramidi, o ne' cilindri, o ne' coni fosse la base del primo a quella del secondo, come reciprocamente l' altezza del secondo all' altezza del primo, tali solidi saranno uguali, perchè la ragione composta della

della base dell' uno alla base dell' altro, e dell' altezza di quello all' altezza di questo, che è come la base di questo alla base di quello, è lo stesso, che ragione di ugualità, essendo la composta di quella base a questa, e di questa a quella, la stessa, che di quella base a se stessa.

II. E viceversa, se i prismi, o le piramidi, o i cilindri, o i coni sono uguali, dovranno avere le basi reciproche dell' altezze, perchè la ragione composta della base del primo a quella del secondo, e dell' altezza di quello all' altezza di questo, non sarebbe ragione di ugualità, se non essendo quella base a questa, come vicendevolmente l' altezza di questo all' altezza di quello.

PROPOSIZIONE IX.

I coni, ed i cilindri simili ACE, BFH, *sono in ragione tripla de' diametri delle loro basi* CE, FH. FIG. 186.

IMperocchè questi solidi essendo simili, i loro assi *AD*, *BG* (quantunque fossero similmente inclinati, e non perpendicolari) sono come le loro altezze, e proporzionali a' diametri delle loro basi circolari; ed esse basi, essendo cerchj, sono come i quadrati de' loro diametri; pertanto esse basi sempre sono in ragione duplicata de' diametri; ma il solido *ACE* al solido *BFH* è in ragione composta di quella delle basi, e di quella delle altezze; dunque sono in ragione duplicata de' diametri, e in quella delle altezze; però essendo queste ancora come i diametri, ne riesce,

che

che ſiano in triplicata ragione di eſſi diametri; come dovea dimoſtrarſi.

COROLLARJ.

I. E' manifeſto, che ancora queſti ſimili cilindri, o conj ſaranno in tripla ragione di quella delle loro altezze, o de' loro lati omologj, li quali ſono nella ſteſſa ragione de' diametri delle loro baſi.

II. Ancora i priſmi ſimili, e le piramidi ſimili ſaranno in triplicata ragione de' loro lati omologhi, o delle loro altezze, o de' diametri delle loro baſi, o de' cerchj circoſcritti alle baſi medeſime, eſſendo pure i lati omologi, o i diametri delle baſi, come le loro altezze, e le baſi ſimili in duplicata ragione di detti lati; onde la ragione compoſta della proporzione delle baſi, e di quella delle altezze, o de' lati omologi, rieſce triplicata di quella di eſſi lati, o de' loro diametri.

III. Similmente altri ſimili corpi regolari, o irregolari ſaranno in ragione triplicata de' loro lati omologi, o de' loro aſſi, potendoſi dividere in altrettante ſimili piramidi tanto l' uno, che l'altro, ciaſcuna delle quali alla ſua corriſpondente è in triplicata ragione di quella de' loro lati omologi.

FIG. 187. IV. Quindi, eſſendo quattro rette A, B, C, D continuamente proporzionali, qualunque ſolido ſi faccia ſopra il primo lato A ed un altro ſimile ſopra il lato B, ſarà il ſolido primo al ſecondo, come la prima retta A alla quarta D, avendo quella a queſta triplicata ragione di A a B.

PRO-

PROPOSIZIONE X.

FIG. 188.

Essendo continuamente proporzionali tre linee rette R, S, T, *fatto con le medesime un parallelepipedo* ABHF, *ed un' altro* MNOQ *con tutti i lati uguali alla retta mezzana* S, *e con uguali angoli solidi nell' uno, e nell' altro, saranno ambidue tra di loro uguali.*

IMperocchè essendo $AB \cdot QK :: KL \cdot BC$, le basi ABC, QKL saranno uguali; ed essendo ancora $BH = KN$, le loro altezze saranno pure uguali; dunque essi solidi sono uguali.

COROLLARJ.

I. Similmente fatti i prismi $FEABH$, $POQKN$, essendo nel primo le tre linee AB, AE, AD uguali alle tre R, S, T; e nell' altro le linee QK, QO, QI uguali alla media S, ma con angoli solidi uguali, saranno pure essi prismi tra loro uguali, come sono uguali que' parallelepipedi, dupli di essi prismi; ed ancora chi facesse le piramidi $AEBD$, $QOIK$ con le stesse linee, saranno pure esse piramidi uguali, come sono uguali detti prismi tripli di esse.

FIG. 189.

II. Facendo pure due cilindri $ABCD$, $EFGH$, ne' quali il diametro del primo BC al diametro del secondo FG sia come la prima R alla seconda S, o come S a T, ma l' altezza del secondo a quella del primo, come la prima R alla terza T, saranno essi cilindri uguali, perchè essendo il cerchio del primo a quello del secondo, come il quadrato di BC al quadrato di FG, e tanto il

quad-

quadrato di R al quadrato S, quanto il quadrato S al quadrato T, essendo come R a T, cioè come reciprocamente è l'altezza HG all'altezza DC, perciò avendo essi cilindri le basi reciproche all'altezze, devono essere uguali.

III. Similmente i coni, che si facessero colle dette basi, e con l'altezze medesime, saranno uguali, come lo sono i cilindri tripli di essi coni.

PROPOSIZIONE XI.

Girando il semicircolo EBR, *ed il rettangolo circoscrittogli* EFQR, *intorno al diametro* ER, *ne nasce la sfera dal semicircolo, ed il cilindro circoscrittogli dal detto rettangolo; e sarà l'eccesso del cilindro sopra la sfera uguale al cono, che è tra la stessa base circolare, e la medesima altezza.*

FIG. 190.

Tirate al centro le rette FC, DC, s'intenda fatto con la rivoluzione del triangolo FEC circa EC il cono $DVFTC$; questo si mostrerà essere uguale all' eccesso del semicilindro $DTFBYA$ sopra l' emisfero $BYANEOB$; imperocchè tagliando questi solidi con un piano parallelo al cerchio $DTFV$ per la retta GH parallela a DF, segante l'emisfero ne' punti N, O, ed i lati del cono in L, M; congiunto il raggio CO, sarà $CO^2 = IH^2$; ed è $CO^2 = CI^2 + IO^2$, e l'altro $IH^2 = IO^2 + GOH$; dunque $CI^2 = GOH$; ed è $CI^2 = IM^2$ (come $CE = EF$, e $CI = IM$) dunque $IM^2 = GOH = IH^2 - IO^2$, però il cerchio del raggio IM, dentro il cono $DVFTC$, è uguale all' eccesso del cerchio, che è nel cilindro col raggio IH, sopra il cerchio dell' emisfero,

col

col raggio *IO*, essendo questi cerchj, come que' quadrati; dunque essendo qualunque cerchio di quel cono uguale all' eccesso de' cerchj del cilindro *DTFBYA*, sarà esso cono uguale all' eccesso di esso cilindro sopra l' emisfero; e similmente l' eccesso dell' altro cilindro *AYBQXPS* sopra il rimanente emisfero *AYBR* sarà uguale all' altro cono *CQSPX*; dunque l' eccesso di tutto il cilindro *FQSPD* circoscritto alla sfera, sopra la detta sfera *EBYAR* è uguale alli due coni fatti colla medesima base circolare coll' altezza del raggio, li quali uguagliano il cono della medesima base, con l' altezza di tutto il diametro doppio del raggio; però il detto eccesso del cilindro sopra la sfera inscrittagli è uguale al cono *EPSQX*, che ha la stessa base circolare *PSQX*, e l' altezza *AE* diametro della sfera. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Dunque il detto eccesso del cilindro sopra la sfera è un terzo di esso cilindro, essendo pure il detto cono un terzo del medesimo.

II. E però il cilindro alla sfera inscritta è in ragione sesquilatera, cioè come 3 a 2.

III. In un emisfero *AYBR* inscritto un cono *RBYA*, che ha la medesima base circolare, e la stessa altezza *CR*, esso emisfero sarà doppio di esso cono, essendo pure questo uguale all' altro *CPSQX*, ed in somma un terzo del cilindro circoscritto all' emisfero, di cui è sesquilatero.

IV. Le sfere sono in triplicata ragione de' loro diametri, essendo proporzionali a' loro circo-

scritti cilindri, i quali sono simili, e però sono in triplicata ragione de' loro assi, o diametri.

PROPOSIZIONE XII.

TAV. XIV. FIG. 191.

Nella sfera non solamente sono cerchj i piani, che fanno le ordinate del semicerchio, dalla cui rivoluzione intorno al diametro si genera essa sfera; ma qualsivoglia piano DEB, *che seghi essa sfera, ne fa nascere pure un circolo* DEBG.

Imperocchè dal centro C di essa sfera tirata la CA perpendicolare sopra quel piano, e congiunte al perimetro di tale sezione le rette AD, AE, AB, indi tirati i raggi CD, CE, CB, che sono uguali, i loro quadrati saranno pure uguali; ma $CD^2 = CA^2 + AD^2$; e $CB^2 = CA^2 + AB^2$ e $CE^2 = CA^2 + AE^2$, e così sempre; dunque ancora $AD^2 = AB^2 = AE^2$, mentre collo stesso quadrato della perpendicolare CA uguagliano il quadrato del raggio della sfera; però tutte le rette AD, AB, AE &c. essendo uguali, bisogna che questa sezione $DEBG$ sia un cerchio, il di cui centro A; dunque tutti i piani, che segano la sfera riescono cerchj. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Quindi dal centro di qualsivoglia sezione circolare della sfera, eretta la perpendicolare AC, passa per lo centro C di essa sfera: siccome tirata dal centro della sfera sopra qualunque piano, che la seghi, la perpendicolare CA, passa per lo centro di tale sezione circolare.

FIG. 192. II. Similmente, per trovare il centro della sfera

ra, da due ſezioni di piani circolari DE, GF, non parallele tra loro, tirate dal centro A, e dal centro B di eſſe le perpendicolari AC, BC, convenienti in C, ſarà eſſo C il centro di eſſa sfera, perchè tutte e' due queſte perpendicolari paſſano per lo centro della sfera.

III. Se tali cerchj ſono uguali, eſſendo il raggio AE del primo uguale al raggio BF del ſecondo, ſaranno eſſi ugualmente diſtanti dal centro C della sfera, perchè eſſendo i quadrati de' raggi CE, CF uguali, ſono ancora $AE^2 + AC^2 = BF^2 + BC^2$, e però eſſendo $AE^2 = BF^2$, ancora $AC^2 = BC^2$. Ma ſe foſſe uno GF minore dell' altro DE, ſarebbe queſto più lontano, che quello dal centro C della sfera; mentre eſſendo $BF^2 + BC^2 = AE^2 + AC^2$, e $BF^2 < AE^2$, ſarà $BC^2 > AC^2$, e così è maggiore la diſtanza BC della diſtanza AC.

PROPOSIZIONE XIII.

Deſcrivere nella sfera, il di cui diametro GH, *una piramide equilatera, ed equiangola, che è un ſolido regolare, il quale diceſi* Tetraedro. FIG. 193.

SI pigli del diametro GH la terza parte HA, e per lo punto A ſi ſeghi la sfera con un piano, cui ſia perpendicolare GA, onde ne rieſca il cerchio $FBED$, il di cui diametro FE, il centro A; e diviſo il raggio AF per mezzo in I, ſe gli conduca la perpendicolare BID; indi ſi tirino le rette BE, DE, BG, DG, EG. Sarà il ſolido $GDBE$ la Piramide equilatera ricercata; imperocchè congiunta la FD ſarà uguale al raggio

AD, onde il triangolo *FAD* sarà equilatero, e l'angolo *FAD* sarà la terza parte di due retti, onde l'arco *FD* sarà la terza parte della semiperiferia *FDE*, onde *BFD* è la terza parte di tutta la circonferenza *FBED*; e similmente *BE*, *ED* ne sono le altre due terze parti; dunque il triangolo *BED* è equilatero; ed è il quadrato *BE* triplo del quadrato *AE*, essendo $BE^2 \cdot EF^2 :: IE \cdot EF :: 3 \cdot 4.$, ed $EF^2 \cdot AE^2 :: 4 \cdot 1.$ dunque $BE^2 \cdot AE^2 :: 3 \cdot 1.$; ed ancora GE^2 ad AE^2 è come *HGA* ad *HAG*, cioè :: *HG* · *HA* :: 3 · 1; dunque ancora $BE^2 = GE^2$; e così tutti gli altri lati *GB*, *GD* saranno uguali a *GE* (essendo i loro quadrati uguali al quadrato della perpendicolare *GA*, e al quadrato de' raggi *AB*, *AD*, *AE* tra loro uguali) però sono essi pure uguali agli altri lati *BE*, *BD*, *DE*; dunque tutti i lati di essa piramide sono uguali, onde è composta di quattro triangoli equilateri; ed è un solido da lati uguali, e da angoli uguali compreso; però esso *GDBE* è il Tetraedro, che volevasi inscrivere nella sfera.

COROLLARJ.

I. Il quadrato di ciascun lato *GE* della Piramide al quadrato del diametro della sfera *GH* sta come *AG* · *AH* :: 2 · 3.

II. Il quadrato del raggio della sfera *CG* al quadrato del lato *GE* della Piramide, è come 3. 8.; perchè il quadrato del raggio essendo un quarto del quadrato del diametro, $CG^2 \cdot GH^2 :: 1 . 4 :: 3 \cdot 12$; ma $GH^2 \cdot GE^2 :: 3 \cdot 2 :: 12 \cdot 8$; dunque $CG^2 \cdot GE^2 :: 3 \cdot 8$.

PRO-

PROPOSIZIONE XIV.

Nella sfera, il di cui diametro GH, *inscrivere un cubo, cioè un solido regolare, da sei quadrati uguali compreso.* FIG. 194.

SI pigli *AH* uguale a un terzo del diametro *GH*, come si è fatto nella precedente, e gli si ponga *AE* perpendicolare, conveniente colla circonferenza del cerchio in *E*, e si congiungano *GE*, *EH*, e si compisca il rettangolo *GEHB* inscritto al medesimo cerchio. Poscia per le rette *GE*, *BH* si tirino due piani perpendicolari al piano del detto rettangolo, i quali saranno due cerchj paralleli *EKGI*, *HFBD*; ne' quali essendo i diametri *EG*, *HB* uguali, tirate in essi per i loro centri *N*, *C* le rette *KNI*, *DCF* ad angolo retto a' detti diametri, e congiunte le rette *EI*, *IG*, *GK*, *KE* nell'uno, ed *HD*, *DB*, *BF*, *FH* nell'altro, saranno questi due quadrati uguali, in detti circoli inscritti; e congiunte ancora le rette *ID*, *KF*, saranno pure parallele alle altre *EH*, *GB*, congiungendo que' lati uguali de' quadrati paralleli, e saranno altri quadrati uguali a quelli; imperocchè siccome il quadrato *GE* è duplo del quadrato *EK*, ed è quel medesimo duplo del quadrato *EH*, essendo $GE^2 \cdot EH^2$ :: $GA \cdot AH$ :: $2 \cdot 1$. dunque $EK = EH$, e così tutte l' altre linee, che fanno i lati del solido *EKGIDBFH*, essendo uguali, e ad angoli retti, rimane evidente essere questo un cubo di sei quadrati *EKGI*, *BFHD*, *EKFH*, *KFBG*, *GIDB*, *IDHE*, inscritto nella data sfera. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Il quadrato del diametro GH della sfera è triplo del quadrato di ciascun lato del cubo inscrittovi, perchè $GH^2 \cdot EH^2 :: GH \cdot HA :: 3 \cdot 1$.

II. Essendo il lato della Piramide $= GE$, il quadrato di esso al quadrato del lato del cubo è come $2 \cdot 1$; essendo $EG^2 \cdot GK^2 :: EG \cdot GN$.

III. Essendo il quadrato del raggio della sfera al quadrato del lato della piramide, come 3 a 8; ed il quadrato di esso lato piramidale al quadrato del cubo inscritto nella medesima sfera in ragione dupla, come 8 a 4; perciò il quadrato del raggio della sfera al quadrato del lato del cubo inscrittovi è come 3 a 4.

PROPOSIZIONE XV.

Nella sfera inscrivere un solido regolare, compreso da otto triangoli equilateri, che dicesi Ottaedro.

FIG. 195. SI seghi per lo centro A essa sfera con due piani $HEGD$, $CEBD$, l'uno all' altro perpendicolare, che converranno insieme nel loro comune diametro ED, e condotti gli altri diametri GH, BC perpendicolari al suddetto, e tra loro ancora; si congiungano le rette GE, GD, DH, HE, EB, BD, DC, CE, che tutte saranno tra loro uguali, essendo i lati de' quadrati $GEHD$, $CEBD$, inscritti in questi uguali cerchj; è manifesto, che il solido sarà compreso da questi otto triangoli equilateri, GEB, GEC, GCD, GDB, HEB, HEC, HCD, HDB; e però esso

so sarà l' Ottaedro equilatero inscritto nella sfera. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Il quadrato del diametro *CB* della sfera è duplo del quadrato del lato *GB* di questo solido regolare interpostovi.

II. Esso quadrato del lato di questo Ottaedro al quadrato del lato della Piramide inscritta nella stessa sfera sarà come 3. a 4, essendo il quadrato del lato dell' Ottaedro al quadrato del diametro della sfera come 1. a 2., cioè come 3. a 6; e il quadrato di detto diametro della sfera al quadrato del lato della Piramide, come 3. a 2, cioè come 6 a 4.

III. Il quadrato del lato dell' Ottaedro al quadrato del lato del cubo inscritto alla detta sfera è come 3. a 2, essendo quello al quadrato del diametro, come 1. a 2, ed esso quadrato del diametro al quadrato del lato del cubo, come 3. ad 1.

IV. Ma ancora il quadrato del diametro della sfera al quadrato del lato della Piramide è come 3. a 2; dunque il diametro della sfera al lato della piramide è come il lato dell' ottaedro al lato del cubo.

PROPOSIZIONE XVI.

FIG. 196.

Nella data sfera inscrivere un corpo regolare, che dicesi Dodecaedro, *da dodici pentagoni equilateri, ed equiangoli compreso.*

SIa il cubo $ADCGB$ in essa sfera descritto, i cui lati BC, CD, AD si dividano pel mezzo ne' punti L, H, F, e si compiscano i quadrati $LCHN$, $NHDK$, $DFIH$, e divisi i lati LN, NK, HI nell' estrema, e media ragione, siano i maggiori segmenti NP, NO, IQ, ed a questi si alzino uguali le rette PS, NV, OR perpendicolari al piano del quadrato $BCDE$, le quali saranno parallele, convenienti in una retta SVR parallela a PO, e per il punto Q nel piano NHI, si conduca ZQ parallela ad NH, e congiunta la VH, concorra con ZQ in T; indi si tirino le linee CT, DT, DR, CS; nel piano delle parallele CD, SR ne riuscirà il pentagono $CSRDT$ regolare, li cui angoli uguali saranno ugualmente distanti dal centro X della sfera, e del cubo, il quale centro è nella retta VNZ prolungata fino al lato IX del quadrato, che può farsi $NHIX$, sopra tali linee, che sono la metà de' lati del cubo, onde il punto X riesce nel mezzo.

Tirate le rette CP, DO, DQ, CQ, è chiaro essere queste uguali, essendo basi di triangoli rettangoli, i di cui lati maggiori sono la metà del lato del cubo, cioè CL, DK, DH, CH, ed i lati minori PL, KO, HQ sono pure la porzione minore dell' estrema, e media ragione di esse LN, NK, IH, ciascuna uguale alla metà del lato del cubo, e però tutti essi lati sono uguali; ed il quadrato CP essendo triplo del quadrato PN, perchè $CL^2 + LP^2 = NL^2 + LP^2 = NP^2 + 2\,NPL + 2\,LP^2 = NLP + 2\,NLP = 3\,NLP = 3\,PN^2$; ed aggiunto il quadrato $PS^2 = PN^2$, sarà CP^2 $+ PS^2$

$+ PS^2 = CS^2 = 4PN^2 = 4VS^2 = SR^2$; dunque $CS = SR$; e così ancora DR, il di cui quadrato $= DO^2 + OR^2$, sarà uguale ad SR; ed essendo ancora $QT = VN$, perchè $NH \cdot VN :: QT \cdot QH$, ed è $NH \cdot VN$ ($LN \cdot NP :: NP \cdot PL$) $:: VN \cdot QH$; dunque $QT = VN$, e però ancora $DT^2 = DQ^2 + QT^2 = 4PN^2$; e così ancora CT, e TD sono uguali a CS, ad SR, a DR; onde questo pentagono $SRDTC$ è equilatero.

Che sia poi ancora equiangolo, tiratavi la retta CR, si mostrerà, essere questa $= CD$; imperocchè essendo $NO = NP$ (per il Coroll. 6. della Proposiz. 5. della parte seconda) sarà pure $LO \cdot LN :: LN \cdot NO$; dunque $LO^2 + ON^2 = 3LN^2$; ed essendo $OR = ON$, saranno $LO^2 + OR^2 = 3NL^2$, ed aggiuntovi $CL^2 = NL^2$, i quadrati $LO^2 + OR^2 + CL^2 = 4NL^2 = CD^2$; ma congiunta CO, sarà $CO^2 = LO^2 + CL^2$, dunque $CO^2 + OR^2$, cioè $CR^2 = CD^2$; onde l'angolo $CSR = CTD$, avendo uguali i lati, e la base $CR = CD$; e così pure dimostrerassi ancora l'angolo SRD uguale a gli altri, e l'angolo RDT con l'altro TCS può dimostrarsi pure uguale a quelli, perchè condotta la TR, siccome $VN = PN$, ed $NZ = HQ = PL$, la $VZ = NL$; e la $ZQ = NH = NL$, e $QT = VN = NO$, dunque $ZT = LO$; onde $VZ^2 + ZT^2 = VT^2 = NL^2 + LO^2 = CL^2 + LO^2 = CO^2$; ed essendo ancora $VR^2 = OR^2$, li quadrati $VT^2 + VR^2 = TR^2 = CO^2 + OR^2 = CR^2$; onde ancora la $TR = CR$, ed i lati RD, e DT uguali a' lati RS, CS; però l'angolo $RDT = RSC$;

ed

ed ancora TCS si mostra uguale agli altri; però esso pentagono è ancora equiangolo.

Ed essendo $NX = HI = LN$, ed $NV = NO$, sarà $XV = LO$, ed $VR = NO$, dunque $LO^2 + ON^2$, che è uguale al triplo di LN, ed ancora $XV^2 + VR^2$, cioè il quadrato della linea, che si conducesse da X ad R, sarà il triplo del quadrato LN; ed ancora essendo $ZT = LO$, ed $XZ = PN = NO$, sono pure li quadrati $ZT^2 + XZ^2 = LO^2 + NO^2 = 3LN^2$; e tale sarebbe il quadrato della retta condotta da X a T, dunque sarà uguale alla condotta da X a R, e da X a S, e però tutti uguali al raggio della sfera, che viene da X agli angoli del cubo, cioè a D, ed a C, perchè essendo il quadrato del diametro della sfera triplo del quadrato del lato cubico, ancora il quadrato del semidiametro, cioè del raggio della sfera è triplo del quadrato di LN, che è la metà di LK, o di CD, lato del cubo; sicchè tutti gli angoli del pentagono $CTDRS$ sono nella superficie della sfera, essendo ugualmente lontani dal centro X di essa. Il che riuscendo, in tutte l' altre parti descritto il pentagono, è chiaro, che saranno dodici, e però sarà fatto il dodecaedro regolare inscritto nella sfera. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Il lato del dodecaedro è la porzione maggiore del lato cubico diviso per estrema, e media ragione, perchè siccome $SV = PN$, che è la parte maggiore di NL divisa in detta estrema, e media ragione, così il duplo di quello, che è SR, deve essere la maggior porzione di LK, o

CD

CD, dupla di *NL*, divisa similmente in estrema, e media ragione.

II Quindi il quadrato del lato cubico al quadrato del lato del dodecaedro è come una linea alla minore porzione di essa, divisa con estrema, e media ragione, essendo quella a questa come il quadrato di tutta al quadrato della maggiore porzione.

III. Il quadrato del diametro della sfera essendo triplo del quadrato del lato cubico, sarà al quadrato del lato del dodecaedro come una linea alla terza parte della sua minor porzione, con cui sia divisa per estrema, e media ragione.

IV. Essendo il quadrato del lato della piramide duplo del quadrato del lato cubico, sarà esso quadrato del lato piramidale al quadrato del lato del dodecaedro come una linea retta alla metà della minore porzione di essa, divisa secondo la ragione media, ed estrema.

V. E perchè il quadrato del lato dell'ottaedro al quadrato del lato cubico è come 3. a 2.; perciò esso quadrato del lato di un ottaedro al quadrato del lato del dodecaedro è come una retta a due terzi della minore porzione della stessa sua ragione estrema, e media, con cui può essere divisa.

PROPOSIZIONE XVII.

FIG. 197.

Il quadrato del lato AD *d'un pentagono, inscritto in un cerchio, è uguale al quadrato del raggio di esso* CD, *col quadrato del lato* AE *d'un decagono inscritto nel medesimo cerchio, che divide per mezzo gli archi, cui si sottopongono i lati del pentagono.*

Con-

Congiunto il raggio CE, che divide per mezzo l' angolo DCA, dividasi ancora l' angolo ACE per mezzo colla retta CL; essendo adunque l' arco MD doppio di ED, e l' arco MN $(= AE)$ doppio di EL, sarà l' arco NMD doppio di DL, onde l' angolo NCD, che è il doppio di CAD, sarà pure doppio di DCH; dunque gli angoli CAD, e DCH sono uguali; e però i triangoli ACD, CDH, che hanno l' angolo comune in D, sono simili; onde $AD \cdot DC :: DC \cdot DH$; e però $DC^2 = ADH$; e congiunta la retta EH, e tirata la DE conveniente con CA in B, sarà $EH = HA$, essendo basi de' triangoli CEH, CAH, che intorno agli angoli uguali in C vi è il lato comune CH, ed il raggio $CE = CA$; dunque essendo ancora $DE = EA$, l' angolo $HEA = HAE = ADE$, però sono simili pure i triangoli ADE, ed EAH, onde $AD \cdot AE :: AE \cdot AH$, ed il quadrato $AE^2 = DAH$; dunque $DC^2 + AE^2 = ADH + DAH = AD^2$; onde il quadrato del lato del pentagono è uguale al quadrato del raggio col quadrato del decagono. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Tirate le linee DO, AO, sarà l' angolo $DOA = ECA$, essendo l' uno, e l' altro doppio di EOA, e siccome gli angoli sopra la base del triangolo isoscele DOA, cioè ODA, ed OAD sono doppj dell' angolo verticale DOA; così ancora nel triangolo isoscele ECA gli angoli CAE, e CEA sono ciascuno di essi il doppio dell' angolo ACE; dunque essendo $DEC = CEA$, sarà $DEC = 2\,ACE$; ed è $= ACE + EBA$, dunque bisogna, che sia

ACE

$ACE = EBA$; e però i lati CE, ed EB sono uguali; sicchè BE è uguale al raggio del cerchio CE.

II. Similmente, essendo $CAE = 2\,ACE = 2\,ABE$; ed uguale agli angoli $ABE + AEB$; dunque $ABE = AEB$, ed il lato $AB = AE = ED$; onde ancora $CB = DB$, essendo questo, e quello uguali alla somma di un raggio circolare, e di un lato del decagono.

III. Quindi li triangoli CEB, BAE sono simili, essendo l'angolo $AEB = ECB$, e l'angolo B comune; dunque $CB \cdot BE :: BE \cdot AB$, e $CBA = BE^2 =$ al quadrato del raggio $CA^2 = BE^2$; onde la retta composta insieme col raggio circolare, e col lato del decagono, come sono DB, e CB, essendo $CBA = CA^2$, e $BDE = BE^2$, è divisa in estrema, e media ragione; e così vicendevolmente, se una retta si divide in estrema, e media ragione, il maggior segmento può prendersi per raggio d'un cerchio, e sarà il segmento minore uguale al lato d'un decagono da iscriversi nel medesimo cerchio.

PROPOSIZIONE XVIII.

Descrivere nella sfera un solido regolare compreso da venti triangoli equilateri, il quale dicesi Icosaedro.

FIG. 198.

PEr lo centro C della sfera fatto il cerchio BGD, tirato il diametro BCE, e postagli perpendicolare la retta $BN = BE$, si tiri la retta CN, segante la periferia in A, e D, quindi tirate le perpendicolari al diametro AFS, e DRG, si facciano passare per esse due piani perpendicolari

al

al medesimo cerchio, che saranno li cerchj $AOSL$, $DHGM$, ed in essi descrivansi dal punto A, e dal punto D li pentagoni $AOPQL$, $DIHKM$, ed a tutti i loro angoli si connettano le rette AH, HO, OI, IP, PD, DQ, QM, ML, LK, KA; ed a' termini B, E del diametro si congiungano pure le rette AB, OB, PB, QB, LB, e le rette ED, EI, EH, EK, EM. Quindi ne risulterà il solido regolare da venti triangoli equilateri uguali compreso; Imperocchè essendo BN dupla del raggio BC, sarà pure AF dupla di CF, e però $= RF$, e congiunta AG, sarà $AFRG$ un quadrato; e tirate le GH, GK, che sarebbero lati del decagono inscritto nel cerchio $DHGM$, essendo $AK^2 = AG^2 + GK^2$, ed ancora $AH^2 = AG^2 + GH^2$, ma GH, GK, sono uguali, adunque $AK = AH$, ed AG è uguale al raggio GR, il di cui quadrato col quadrato del lato del decagono uguaglia il quadrato del lato del pentagono inscritto (per la prop. 17.) ne segue, che tanto AK, che $AH = KH$, onde AHK è un triangolo equilatero, e così gli altri interposti fra questi due cerchj saranno pure triangoli di lati uguali; ed essendo $AF^2 = EFB = RBF = RF^2$, la RB è divisa in F con estrema, e media ragione, onde per il Coroll. 3. della Prop. 17. essendo $RF = AF$ raggio del cerchio $AOSL$, deve essere FB uguale al lato di un decagono da inscriversi in esso cerchio; dunque AB è pure uguale al lato dell' inscritto pentagono AO, essendo tanto AO^2, che $AB^2 = AF^2 + FB^2$, e così tutte l' altre rette OB, PB &c. saranno uguali a' detti lati del Pentagono; e similmente dall' altra parte le rette ED, EI &c. uguagliano ciascun lato

to DI, IH &c. dunque è ancora vero, che questi termini sono triangoli equilateri, uguali tra loro, e con ciascuno di quelli intercetti fra li due cerchj; però riesce in tal maniera fatto l' Icosaedro contenuto da venti triangoli uguali tra loro, ed equilateri. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Il quadrato della sfera al quadrato del lato dell' Icosaedro, cioè AD^2 ad AB^2, sta come cinque con la radice di cinque, a due, cioè $:: 5 + \sqrt{5} \cdot 2$, o pure $:: 10 \cdot 5 - \sqrt{5}$ (perchè il prodotto dell' estreme $25 + 5\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 5 = 20$. che è il prodotto delle medie) Il che si pruova, perchè essendo AF doppia di FC, sarà $AF^2 = 4\,FC^2$, e però $AC^2 \cdot CF^2 :: 5 \cdot 1$, e così ancora $AD^2 \cdot AG^2$; ed $AG^2 \cdot GH^2 :: 1 \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ (essendo $AG + GH$ la somma del raggio del cerchio GHD, e del lato del decagono inscritto in esso, come una retta divisa in estrema, e media ragione; onde facendo essa somma $= x$, ed $AG = 1$, sarà $GH = x - 1 = \frac{1}{x}$ dunque $xx - x = 1$, ed aggiunto $\frac{1}{4}$ di quà, e di là, riesce $xx - x + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, e presane la radice $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ onde $x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ però $GH = x - 1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5} + 1 - 2}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$; onde il suo quadrato $GH^2 = \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4}$

$=$

$= \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$) ed aggiuntovi AG^2 $= 1$, ne riesce $AG^2 + GH^2 = 1 + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ $= \frac{2 + 3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} = AH^2 = AB^2$, dunque $AD^2 \cdot AB^2 :: 5 \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{2} :: 10 \cdot 5$ $- \sqrt{5} :: 5 + \sqrt{5} \cdot 2$.

II. Il quadrato del lato della Piramide essendo al quadrato del diametro della sfera come 2. a 3; e di questo diametro il quadrato, a quello del lato dell' Icosaedro, essendo, come $5 + \sqrt{5}$ · a 2: dovrà per analogia perturbata essere il quadrato del lato della Piramide al quadrato del lato dell' Icosaedro, come $5 + \sqrt{5}$ · a 3.

III. Essendo poi il quadrato del lato del cubo al quadrato del lato della piramide, come 1. a 2, cioè come 3 a 6 e il quadrato di questo al quadrato del lato dell' Icosaedro, come $5 + \sqrt{5}$ a 3, sarà il quadrato del lato del cubo a quello del lato dell' Icosaedro, come $5 + \sqrt{5}$ a 6.

IV. E perchè il quadrato del lato dell' Ottaedro a quello del lato Cubico è come 3 a 2, cioè come 6 a 4, e questo a quello del lato dell' Icosaedro, come $5 + \sqrt{5}$ a 6, sarà pure il quadrato del lato dell' Ottaedro a quello del lato dell' Icosaedro, come $5 + \sqrt{5}$ a 4.

V. Il quadrato del lato del Dodecaedro al quadrato del lato dell' Icosaedro, come $\frac{5 - \sqrt{5}}{3}$ a 2; imperocchè il quadrato del lato dell' ottaedro, al quadrato del lato del dodecaedro è come una

retta

retta a due terzi della minor porzione, con cui ſia diviſa ſecondo l' eſtrema, e media ragione; cioè come 2 a $2 - \frac{2\sqrt{5}}{3}$ (perchè ſe una linea ſi fa $= 2$, diviſa in detta eſtrema, e media ragione, ha la porzione maggiore $= \sqrt{5} - 1$, onde la rimanente minor porzione $= 2 - \sqrt{5} + 1 = 3 - \sqrt{5}$, onde li ſuoi due terzi ſono $= 2 - \frac{2\sqrt{5}}{3}$) ed il quadrato del lato dell' Icoſaedro al quadrato del lato dell' ottaedro è come 4. a $5 + \sqrt{5}$; dunque il quadrato del lato dell' Icoſaedro al quadrato del lato del dodecaedro è in ragione compoſta di 2. a $2 - \frac{2\sqrt{5}}{3}$, e di 4. a $5 + \sqrt{5}$, delle quali riſulta la ragione di 8 · $10 + 2\sqrt{5} - \frac{10\sqrt{5}}{3} - \frac{10}{3}$ cioè di 8. a $\frac{20}{3} - \frac{4\sqrt{5}}{3}$, o come 2 a $\frac{5 - \sqrt{5}}{3}$; dunque convertendo, il quadrato del lato del dodecaedro al quadrato del lato dell' Icoſaedro è come $\frac{5 - \sqrt{5}}{3}$, a 2.

PROPOSIZIONE XIX.

FIG. 199.

In un cerchio BDK, *che ſia uguale al maggiore di una ſfera, deſcrivere tutti i lati de' cinque ſolidi regolari, che in eſſa ſfera poſſono inſeriverſi.*

SI tiri il diametro *BCE*, e dal centro *C* ſi alzi perpendicolare il raggio *CK*, cui ſi tiri parallela *BN* = *BE*, ed al centro *C* congiunta la *NC*, che feghi la periferia ne' punti *A*, *D*, ſi

 con-

conduca pure la AF perpendicolare al diametro, e presa la BL uguale alla terza parte del diametro, si alzi pure la perpendicolare LH, segante CN in I, e dal punto I si tiri IG perpendicolare alla AD; poscia si congiungano le rette EH, HB, EK, AG, ed AB, queste saranno i lati di detti solidi regolari, che in detta sfera possono iscriversi. Imperocchè, essendo il quadrato del diametro della sfera BE al quadrato del lato della Piramide come 3 a 2, cioè come BE ad EL, nella qual proporzione è il quadrato di BE al quadrato di EH, però il lato della Piramide sarà uguale alla retta EH.

Ed essendo il quadrato del diametro BE al quadrato del lato del cubo, come $3 \cdot 1 :: EB \cdot BL :: BE^2 \cdot BH^2$, bisogna pure sia BH il lato del cubo.

Ma il quadrato del diametro BE al quadrato del lato dell' ottagono è come $2 \cdot 1 :: BE \cdot EC :: BE^2 \cdot EK^2$; dunque EK è il lato dell' ottaedro.

E perchè il quadrato del diametro della sfera al quadrato del lato del dodecaedro è come 2. ad $1 - \frac{\sqrt{5}}{3}$, sarà AG il lato del dodecaedro, perchè essendo BN dupla di BC, però $BN^2 = 4\, BC^2$, onde $BN^2 + BC^2 = 5\, BC^2 = CN^2$ sicchè posta $BC = 1$, la $CN = \sqrt{5}$, ed essendo $BL = \frac{1}{3} BE = \frac{2}{3} BC$, la $CL = \frac{1}{3} CB$, e la $CI = \frac{1}{3} CN = \frac{\sqrt{5}}{3}$, onde $CA = BC = 1$,

$= 1$, la $CA - CI = 1 - \frac{\sqrt{5}}{3} = AI$, però $DA = 2$, ad AI, è come 2 ad $1 - \frac{\sqrt{5}}{3}$; ed essendo DA un diametro $= EB$, ed ancora $DA^2 \cdot AG^2 :: DA \cdot AI$, perciò AG è il lato del dodecaedro, essendo il quadrato del diametro della sfera AD al quadrato di AG, come 2. ad 1. $- \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Il lato poscia dell'Icosaedro è AB, come apparisce dalla costruzione della precedente proposizione; però le rette EH, BH, EK, AG, AB, sono i lati de' cinque solidi regolari, che possono inscriversi in detta sfera. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Il lato della Piramide EH è il maggiore di tutti, ed il lato AG del dodecaedro è il minimo di ciascuno.

II. Il lato dell'ottaedro EK è maggiore del lato BH del cubo, e questo è pur maggiore del lato AB dell'Icosaedro.

III. I quadrati del lato della Piramide EH, e del lato BH del cubo, presi insieme, sono uguali al quadrato del diametro BE della sfera.

PROPOSIZIONE XX.

Niuno altro solido regolare può aversi, oltre li cinque addotti per inscriversi nella sfera.

IMperocchè l'angolo solido deve essere costituito almeno con tre angoli piani, o con più di

essi, ma però minori di quattro retti; dunque l' angolo de' triangoli equilateri essendo uguale a due terzi di un retto, non possono fare un angolo solido se non tre di essi, come nella Piramide; o quattro de' medesimi, come nell' ottaedro, o al più cinque, come nell' Icosaedro; ma non già sei di essi, che sarebbero quattro retti. L' angolo de' quadrati essendo retto, solamente tre di essi possono fare l' angolo solido nel cubo, perchè quattro sarebbero uguali a quattro retti. L' angolo del Pentagono essendo uguale ad un retto con la quinta parte di esso, possono solamente tre di tali angoli fare l' angolo solido del dodecaedro, e non quattro di essi, che sarebbero maggiori di quattro retti; perciò solamente questi cinque solidi regolari possono riuscirne. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARJ.

I. Non possono però farsi solidi regolari di altri piani compresi da maggior numero di lati uguali, ed uguali angoli, perchè l' esagono ha l' angolo uguale ad un terzo di quattro retti; onde tre angoli dell' esagono equivagliono a quattro retti, e però non possono fare un solido; e gli altri piani regolari di maggior numero di lati avendo l' angolo maggiore di quello dell' esagono, molto meno possono fare l' angolo solido.

II. Si potrebbero inscrivere però nella sfera altri solidi, ma irregolari, o compresi da figure tutte diverse, o da alcune uguali, e tra se simili, ma da altre di sorte diversa uguali, e simili tra di se: Per esempio, si potrebbe in due

pa-

paralleli, ed uguali circoli della sfera descriverci due simili poligoni regolari, di qualunque numero di lati; e da qualsivoglia angolo dell'uno tirate le rette a' termini di qualunque lato dell' altro poligono contrapposto, si faranno altrettanti triangoli simili, quanti sono i lati d'ambidue i poligoni, onde ne riuscirà un solido così inscritto nella sfera; ed ancora in tre circoli uguali, fatti col diametro de' lati d'un triangolo equilatero inscritto nel cerchio maggiore della sfera, e perpendicolari al piano di esso, descrivendo tre poligoni simili, ed uguali, e poscia fatti li triangoli col lato di essi poligoni, e con le rette tirate da' loro termini agli angoli dell' opposto poligono, similmente ne riuscirà un altro solido inscritto nella sfera &c. Ma questi non diconsi solidi regolari, non avendo tutti i piani simili, ed uguali, ma solamente alcuni simili d' una specie, altri d'un altra.

AVVERTIMENTO.

Moltissime altre proprietà de' solidi potrebbero quì aggiungersi; ma troppo lunghe riuscirebbero queste Instituzioni; siccome ancora delle piane figure potrebbero esporsi molti altri Teoremi, che io ne' miei scritti ho più volte dimostrati; ma non ho stimato bene l' aggiungerli tutti in questo Trattato, che ora finalmente voglio, che sia esattamente il sincero.

IL FINE.

ERRORI			CORREZIONI
Pag. 35. verso	17.	*B D F*	*D B F*
43.	2.	sono due retti	sono uguali a due retti
50.	31.	l'angolo *C A L*	l'angolo *C L A*
70.	2.	retti angoli	rettangoli
118.	21.	dagli	degli
161.	17.	altezza *A E*	altezza *E R*

INST. GEOM. TAB. I.
5.
A
B
C
E
F
10.
D
G
E
F
D
A
B
C
17.
L
E
F
H
2.
B
C
H
7
C
L
C
D
C

22.
E
B
C
F
D
E
C
26.
D
A
B
G
E
C
B
G
29.
D
E
I
A
32.
B
D
E
C

22.
E
B
C
26.
C
D
A
B
G
E
C
32.
A
B
D
E
C
29.
B
G
D
E
I
F
D
E

37
E
B
C
C F
38.
A
B
C
g
G
E
F.
f
42.
B
E
F
C
G
D
K
H
A
I
H
F
40.
E
F
47
A
4.
B
C
H
B
G
48
E
F
D
A
C
B
G
F
E
D
A
B

A
G
A
E
6.
60
A
C
F
54.
E
B
C
D
A
A
B
E
F
G
C
D
59.
A
E
B
F
C
D
A
67.
F
H
E
C
B
D
G

INST. GEOM. T. V.
70.
73.
F
A
E
G
C
D
B
78.
N
L
C
A
H
83.
C
D
A
B
G
M
L
H
K
I
84.
D
B
A
C
I
A
E
R
H
Q
P
V
H
F
C
E
B

92.
96.
97.
01.
102.
107.

111.
A
D
E
B
G
b
C
E
a
B
G
D
116.
A
B
C
D
A
B
C
D
121.
A
D
C
B
124.
A
C
B
F
126.
B
E
D

131.

135.

139.

INST. GEOM. T. IX.
143.
A
H
I
G
B
D
C
148.
D
H
A
E
G
B
F
153.
A
D
H
E
C
F
G

92.
96.
97.
01.
102.
107.

INST. GEOM. T. VII.
111.
A
D
E
B
G
b
C
E
a
B
G
D
116.
A
B
C
D
A
B
C
D
121.
A
D
C
B
124.
A
C
B
F
126.
B
E
D

E

C

B

143.
A
H
I
G
B
D
C
148.
D
H
A
E
G
B
F
153.
A
D
H
E
C
F
G
B
H
B
B
A

INST. GEOM. T. XII.
160.
163.
166.
172.
A
B
C
D
E
F
G
H
I
L

INST. GEOM. T. XIII.
178.
185.
188.
190.
L
H
E
F
G
A
B
O
C
D
E
F
G
N
L
I
M
O
H
A
C
B
P
R
Q
V
T
S
X
Y

INST. GEOM. T. XIV.
192.
4
G
K
B
N
I
C
F
A
D
B
G
H
N
M
O
R
K
C
O
P
H
E
H
L
A
Q
B
N
I
99.
G
K
H
A
I
C
L
F
B
D
Sgrilli Sculp.